Lezione 15

mercoledì 13 novembre 2013
14:08

- Esercizio $f: [0,1] \to [0,1]$

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2} \qquad x \in [0,1]$$

- f è 1-1
- f è suriettiva su $[0,1]$. Calcolare $f^{-1}: [0,1] \to [0,1]$

Prendo $y \in [0,1]$ e cerco $x \in [0,1]$ tale che $f(x) = y$ ovvero:

$$\frac{2x}{1+x^2} = y \iff 2x = y + yx^2$$

l'eq. diventa:

$$yx^2 - 2x + y = 0$$

Se $y = 0$ trovo la soluzione $x = 0$.
Se $y \neq 0$ trovo le due soluzioni:

$$x_{\pm} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4y^2}}{2y} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - y^2}}{y}$$

La radice esiste in quanto $y \in [0,1]$ e inoltre $y \neq 0$.

Certamente $x_{\pm} \geq 0$. Esamino la condizione:

$$x_+ \leq 1 \iff \frac{1 + \sqrt{1-y^2}}{y} \leq 1$$

$$\iff 1 + \sqrt{1-y^2} \leq y$$

$$\iff \sqrt{1-y^2} \leq y - 1$$

NON è possibile

è negativo.

Devo scartare x_+. Esamino ___

$$x_- \leq 1 \iff \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y} \leq 1$$

$$\iff 1 - \sqrt{1-y^2} \leq y$$

$$\iff 1 - y \leq \sqrt{1-y^2}$$

$$\iff (1-y)^2 \leq 1-y^2$$

$$\iff \cancel{1} - 2y + y^2 \leq \cancel{1} - y^2$$

$$\iff y^2 - y \leq 0$$

$y \in [0,1]$ $\iff \underbrace{y}_{\geq 0}\underbrace{(y-1)}_{\leq 0} \leq 0$ Sì è vero $\forall y \in [0,1]$

Questo prova che f è suriettiva da $[0,1]$ in $[0,1]$.

La funzione inversa è:

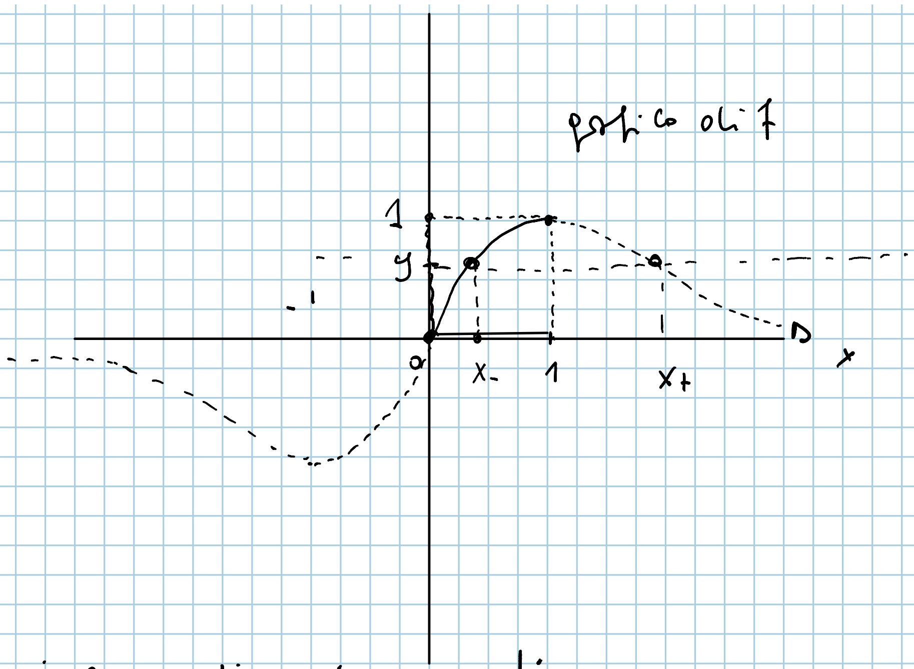
$$f^{-1}(y) = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$$

$$= \frac{\cancel{1} - \cancel{1} + y^2}{y\,(1+\sqrt{1-y^2})} = \frac{y}{1+\sqrt{1-y^2}}.$$

$\square$

Disegno: $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$ Dispari

4.



Funzioni crescenti e decrescenti

Def Sia $A \subset \mathbb{R}$. Una funzione $f: A \to \mathbb{R}$ si dice:

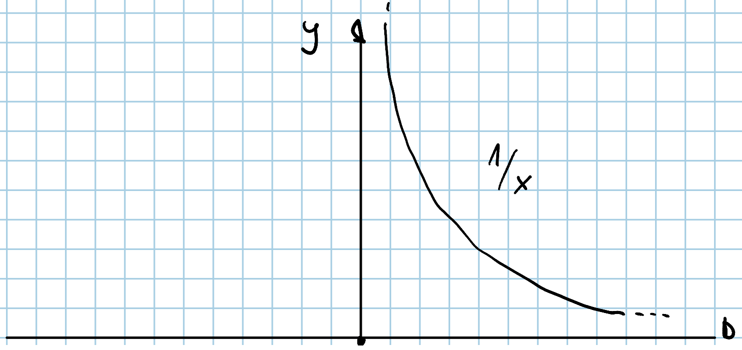
(1) crescente su A se: $x_1 \le x_2 \implies f(x_1) \le f(x_2)$
$x_1, x_2 \in A$

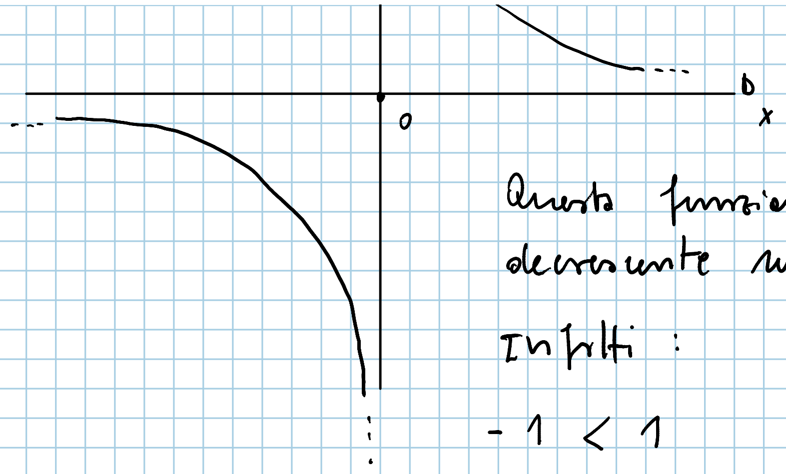
(2) decrescente su A se: $x_1 \le x_2 \implies f(x_1) \ge f(x_2)$
$x_1, x_2 \in A$

Le funzioni crescenti oppure decrescenti nel loro dominio si dicono monotóne.

Esempio Siano $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ed $f: A \to \mathbb{R}$ sia la f.

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$$





Questa funzione NON è decrescente su $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Infatti:

$-1 < 1 \qquad f(-1) = -1 < 1 = f(1)$

Ovviamente f è separatamente decrescente su $(-\infty, 0)$ e su $(0, \infty)$.

Esempio La funzione $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$

$$f(x) = x^n, \quad x \geq 0$$

dove $n \in \mathbb{N}$ fissato, è strettamente crescente.

Lo dimostro: prendo un incremento $h > 0$

$$f(x+h) = (x+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k h^{n-k} =$$

$$= \underbrace{h^n}_{>0} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} x^k h^{n-k}}_{\geq 0} + x^n >$$

$$> x^n = f(x).$$

□

Osservazione Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione. Allora:

f è strettamente monotona su $A \Longrightarrow f$ è 1-1 su

$\not\Longleftarrow$

Non è vero

Funzione Composta

Def. Siano $A, B, C \subset \mathbb{R}$ e siano $f : A \to B$ e $g : B \to C$ due funzioni. Allora possiamo definire la funzione composta

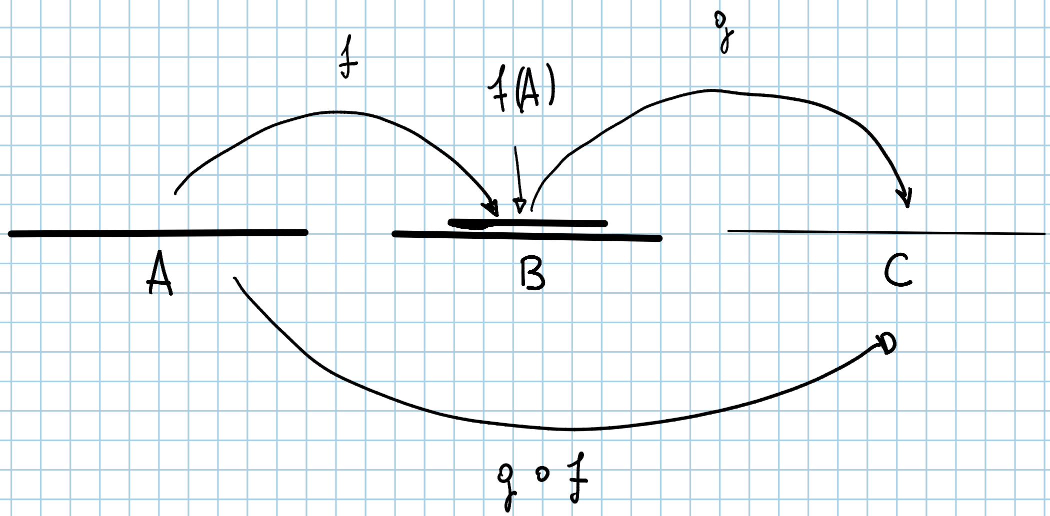
$$g \circ f : A \to C$$

"g composto f"

nel seguente modo:

$$g \circ f\,(x) = g\big(f(x)\big) \qquad x \in A.$$

Disegno



Esempio sia $f : \mathbb{R} \to \overset{[0,\infty)}{\mathbb{R}}$ la funzione $f(x) = x^4$ e

sia $g : \overset{[0,\infty)}{[-1,\infty)} \to \mathbb{R}$ la funzione $g(x) = \sqrt{1+x}$

Osservo che

$$\text{Codominio}(f) = [0,\infty) \subset [-1,\infty) = \boxed{D(g)}$$

Quindi la funzione composta $g \circ f : \mathbb{R} \to \overset{[0,\infty)}{\mathbb{R}}$ è

$$g \circ f\,(x) = g\big(f(x)\big) = g\left(x^4\right) = \sqrt{1+x^4}.$$

Osservazione 1.

Osservazione 1.

1) f è crescente e g è crescente $\Rightarrow$ $g \circ f$ crescente

2) f è crescente e g è decrescente $\Rightarrow$ $g \circ f$ è decrescente

3) f è decrescente e g è decrescente $\Rightarrow$ $g \circ f$ è crescente.

Osservazione 2.

Sia $f : A \to B$ iniettiva e suriettiva.

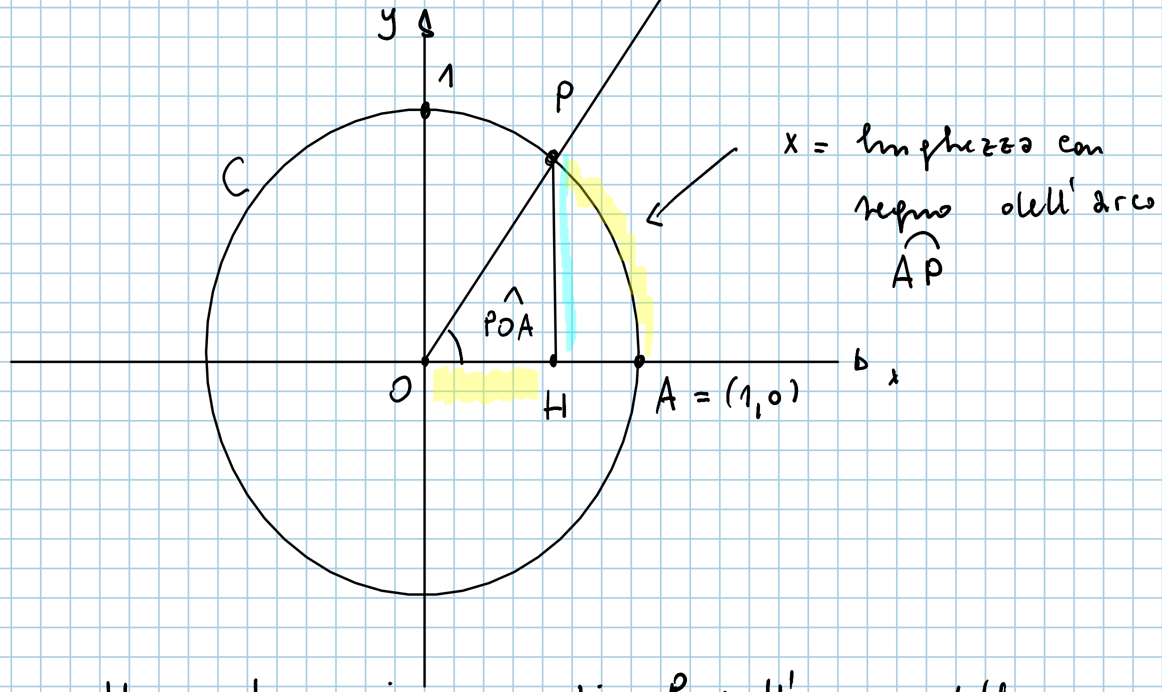
Esiste dunque $f^{-1} : B \to A$. Inoltre:

(1) $f^{-1} \circ f$ = Funzione identità su A $\left(f^{-1} \circ f(x) = x \ \forall x \in A \right)$

(2) $f \circ f^{-1}$ = Funzione identità su B $\left(f \circ f^{-1}(y) = y \ \forall y \in B \right)$.

Funzioni trigonometriche e loro inverse.

Sia $C \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ la circonferenza unitaria centrata nell'origine. Prendiamo $P \in C$ e fissiamo il punto A $A = (1,0) \in C$. Misuriamo l'angolo $P\hat{O}A$ in radianti. Sia $x \in \mathbb{R}$ la misura di questo angolo:



Sia ora H = la proiezione di P sull'asse delle x.

Definiamo le funzioni $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$

e $\cos: \mathbb{R} \to [-1,1]$ nel seguente modo:

$\sin(x) := \overline{PH}$ = lunghezza con segno del segmento PH

$\cos(x) := \overline{OH}$ = lunghezza con segno del segmento OH.

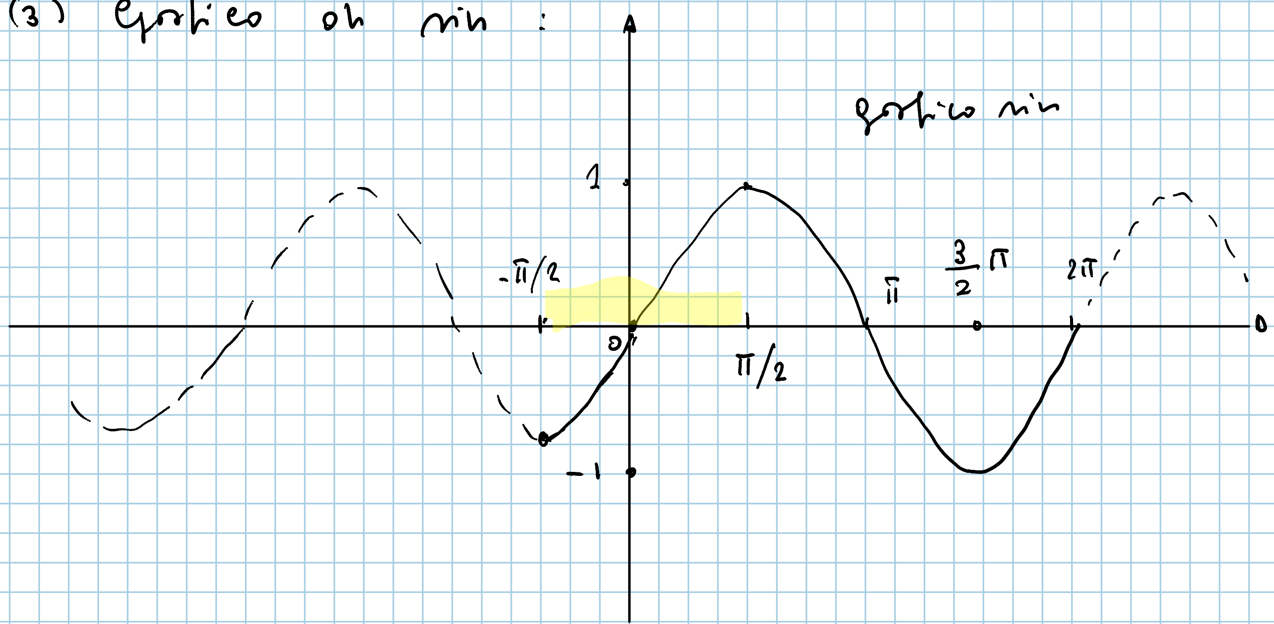
<u>Osservazioni:</u>

(1) Le funzioni sin e cos sono 2π-periodiche ovvero

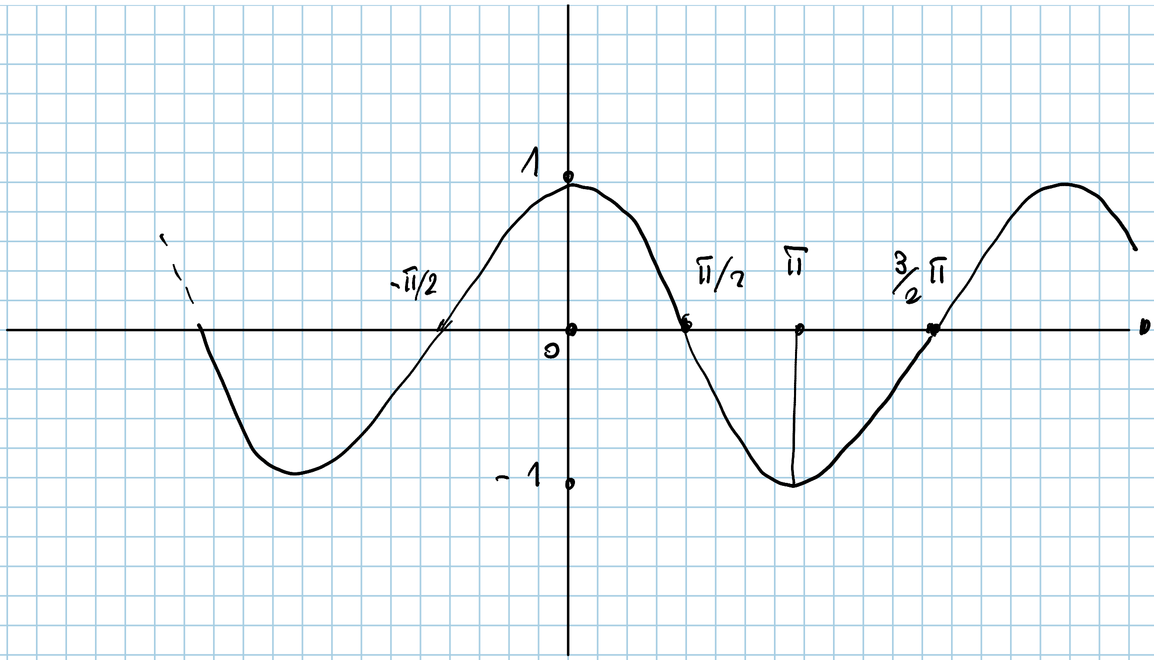
$$\sin(x+2\pi) = \sin(x)$$
$$\cos(x+2\pi) = \cos(x)$$

(2) La funzione sin è dispari
La funzione cos è pari

(3) Grafico di sin:



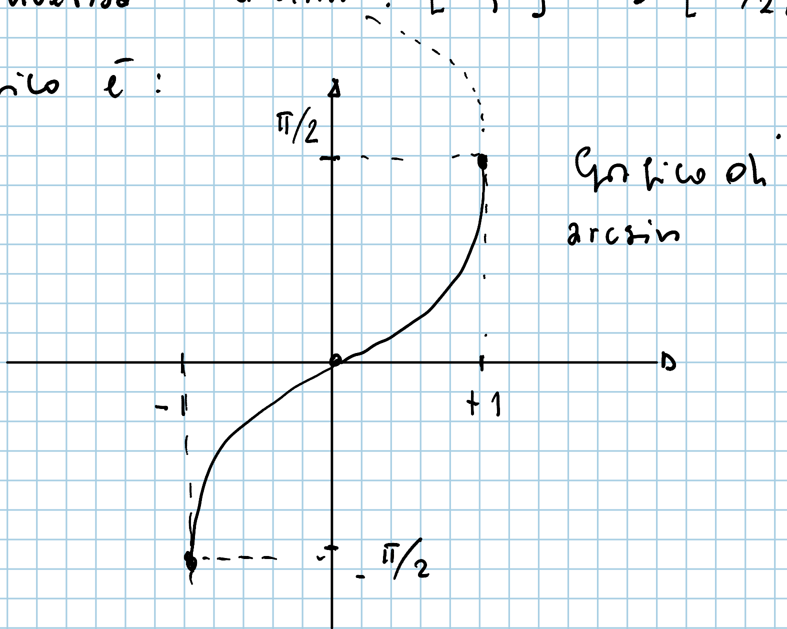
(4) Grafico del coseno:



Funzioni arcsin e arccos

Osservo che la funzione $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ è strettamente crescente e dunque è 1-1 e su da $[-\pi/2, \pi/2]$ in $[-1,1]$. Possiamo definire la funzione inversa $\arcsin : [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$

Il suo grafico è:



Ribadiamo che $D(\arcsin) = [-1,1]$.

Analogamente la funzione $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ è strettamente decrescente e quindi è 1-1 e su da $[0,\pi]$ in $[-1,1]$.

Possiamo definire la funzione inversa $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$

Il suo grafico è:

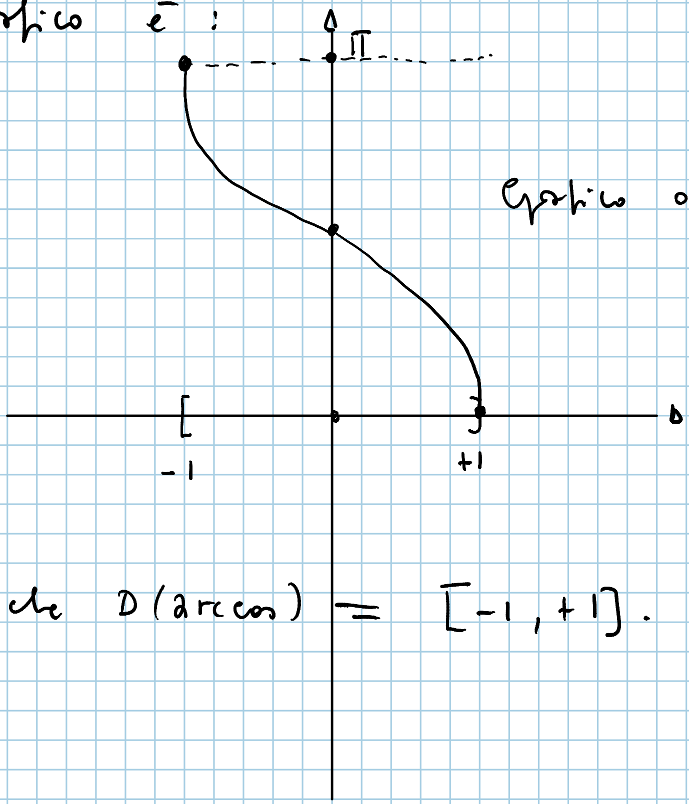


Grafico di arccos.

Ribadiamo che $D(\arccos) = [-1,+1]$.

Esercizio Determinare il dominio e disegnare il grafico della seguente funzione $f(x) = \arcsin(\sin x)$.

$[-1,1]$

$\mathbb{R}$

$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Soluzione: $D(f) = \mathbb{R}$