Lezione 16

giovedì 14 novembre 2013
14:11

- $f(x) = \arcsin(\sin x)$, $D(f) = \mathbb{R}$

  - La funzione f è limitata:

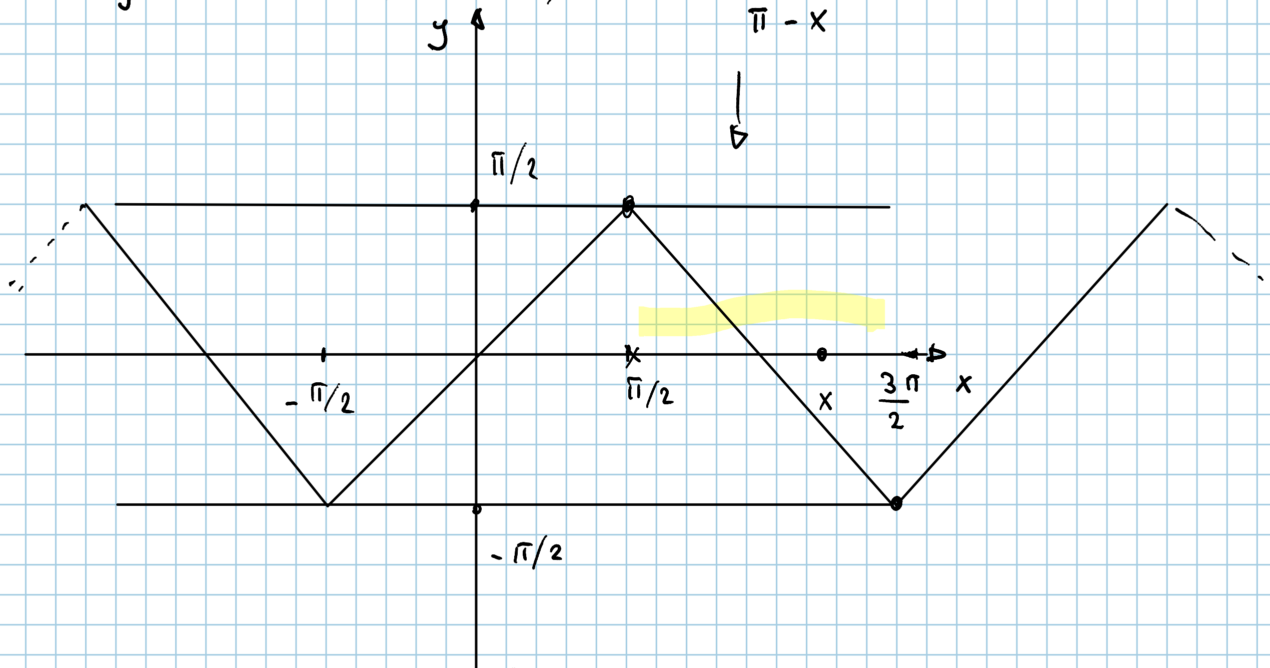
$$-\frac{\pi}{2} \leq f(x) \leq \pi/2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

  - La funzione f è 2π-periodica

Disegniamo il grafico di f:

Prendiamo $x \in [-\pi/2, \pi/2]$: in questo caso:

$$f(x) = \arcsin(\sin(x)) = x$$



Prendo ora $x \in [\pi/2, \frac{3}{2}\pi]$. Attenzione:

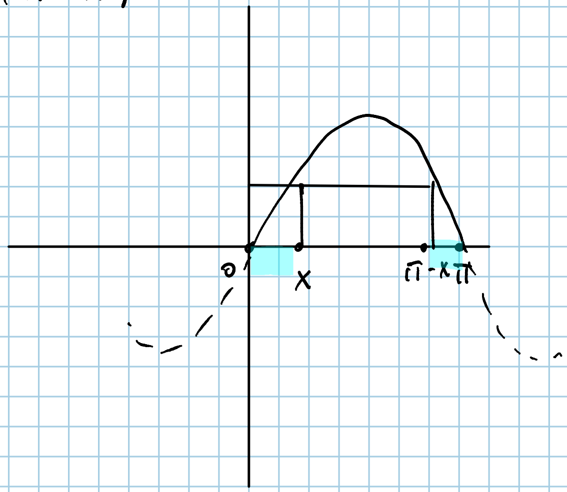
$$f(x) = \arcsin(\sin(x)) \neq x$$

Da x passo al punto $\pi - x \in [-\pi/2, \frac{\pi}{2}]$
Osservo poi che

$$\sin(x) = \sin(\pi - x)$$

$$\sin(x) = \sin(\pi - x)$$

Conti per $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$ avremo:



$$f(x) = \arcsin(\sin(x))$$

$$= \arcsin(\sin(\underbrace{\pi - x}_{\in[-\pi/2,\, \pi/2]}))$$

$$= \pi - x$$

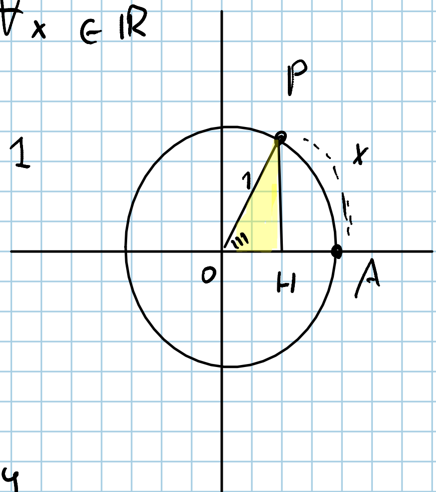
D

Identità trigonometriche

(1) Identità trig. fondamentale:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Per Pitagora: $\overline{OH}^2 + \overline{HP}^2 = \overline{OP}^2 = 1$



(2) Formule di addizione:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

(3) Formule di duplicazione:

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$
$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

(4) Formule di bisezione

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{\quad}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \,.$$

Funzione tangente e sua inversa

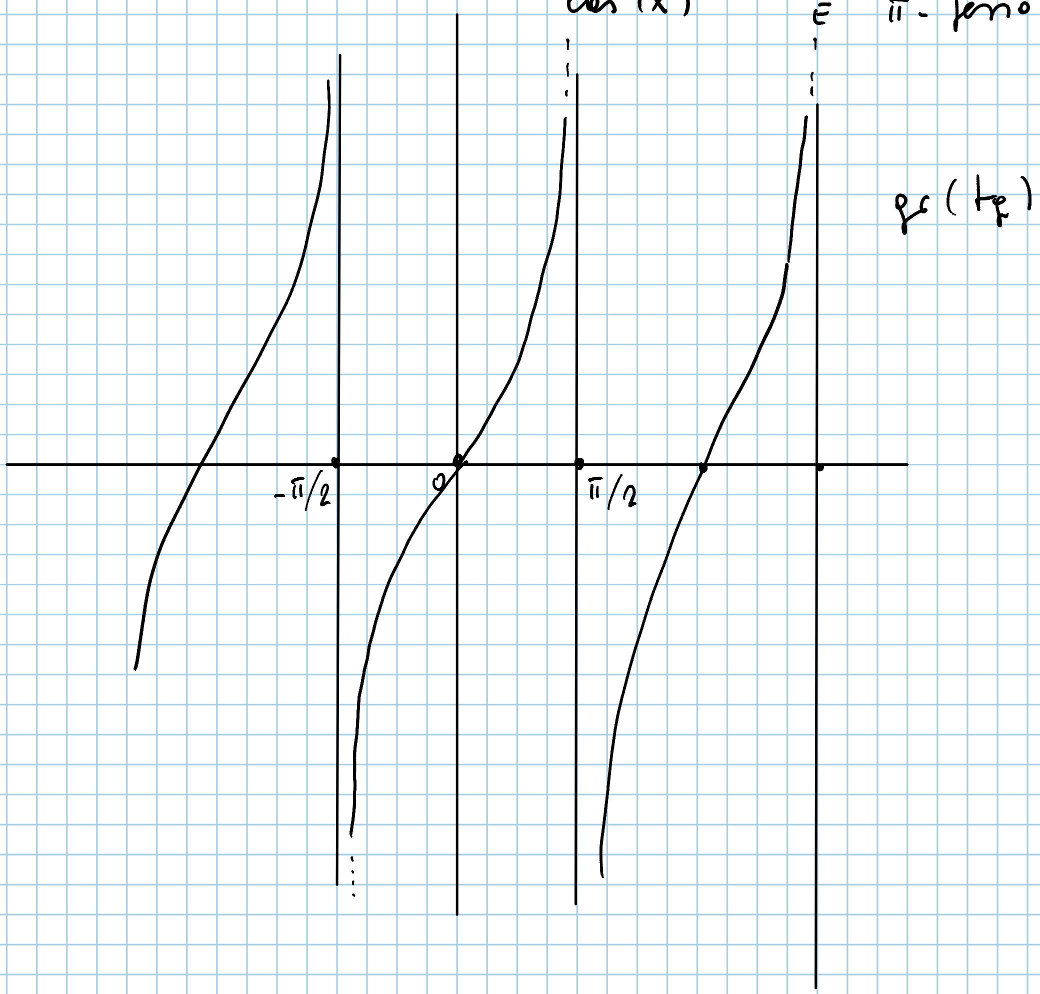
Per $\cos x \neq 0$ cioè per $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

possiamo definire la funzione

$$tg(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

è dispari

è π-periodica

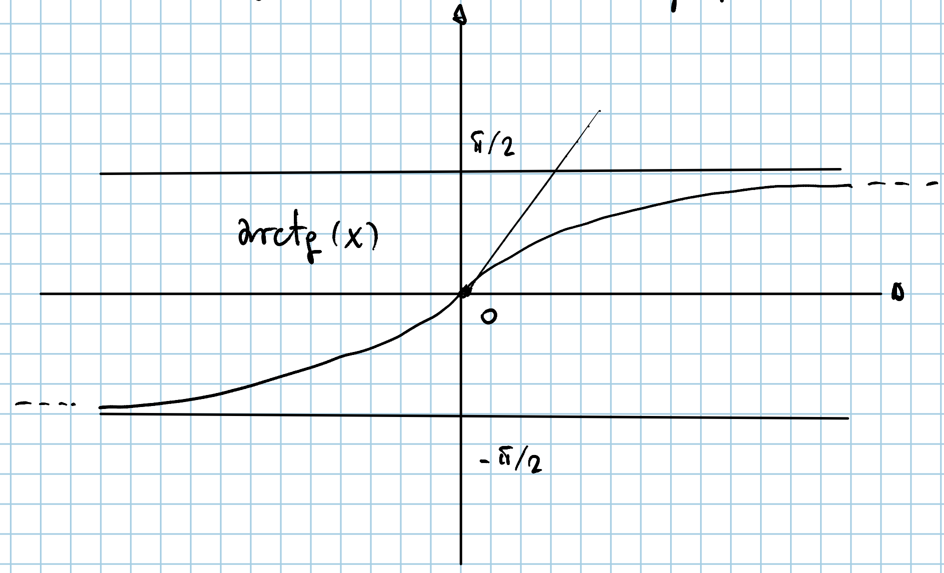


Osservo che $tg : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ è 1-1 e suriettiva

Quindi possiamo definire la funzione inversa

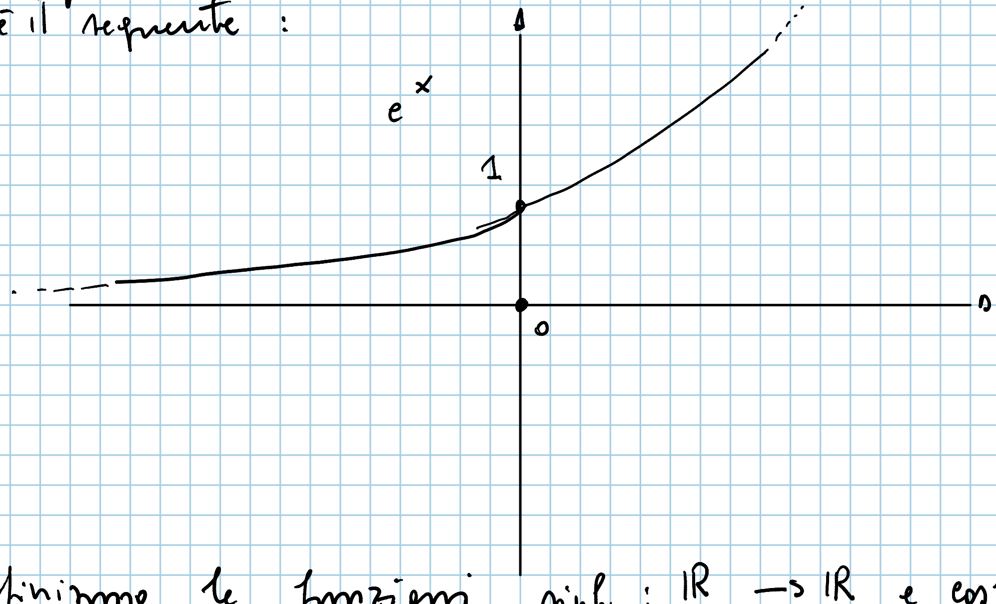
$$arctg : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

É strettamente crescente. Il suo grafico è il seguente:



Funzioni Iperboliche

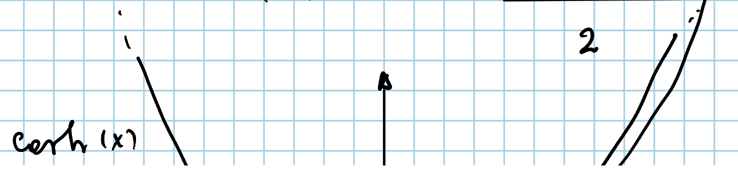
Il grafico della funzione esponenziale $x \mapsto e^x$, $x \in \mathbb{R}$, è il seguente :

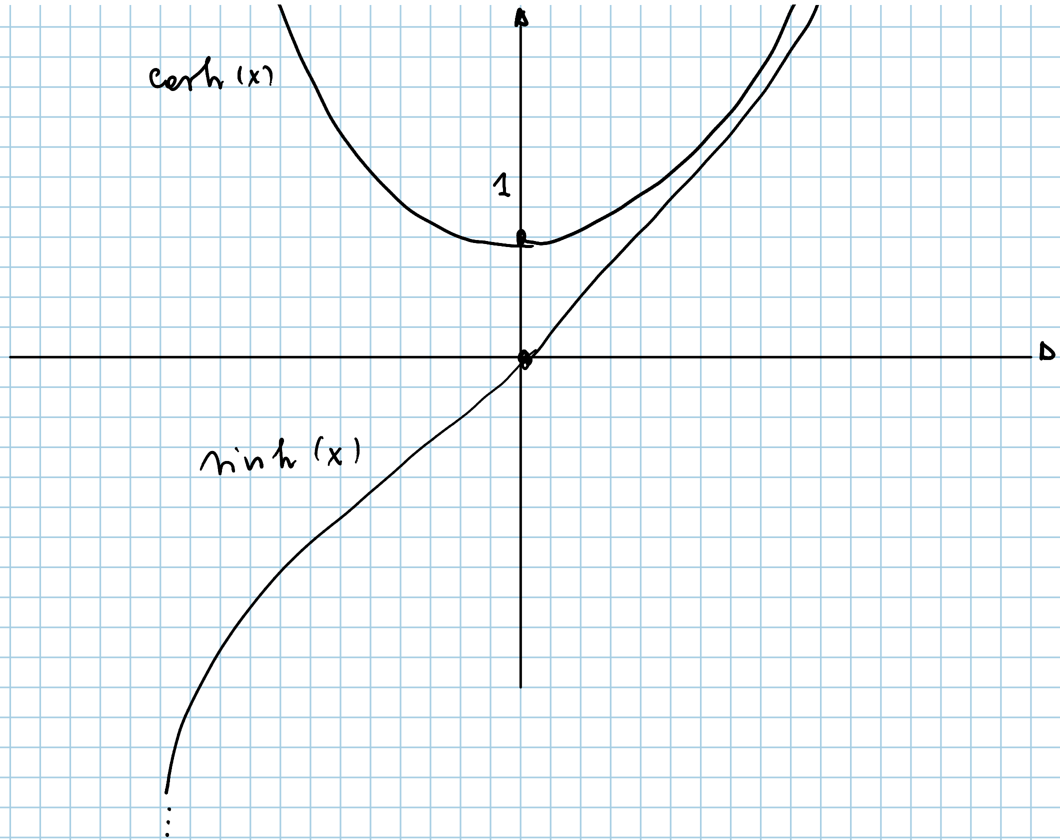


Definiamo le funzioni $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nel seguente modo

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$ É dispari $x \in \mathbb{R}$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$ É pari





Identità iperbolica fondamentale :

Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha :

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

Verifica :

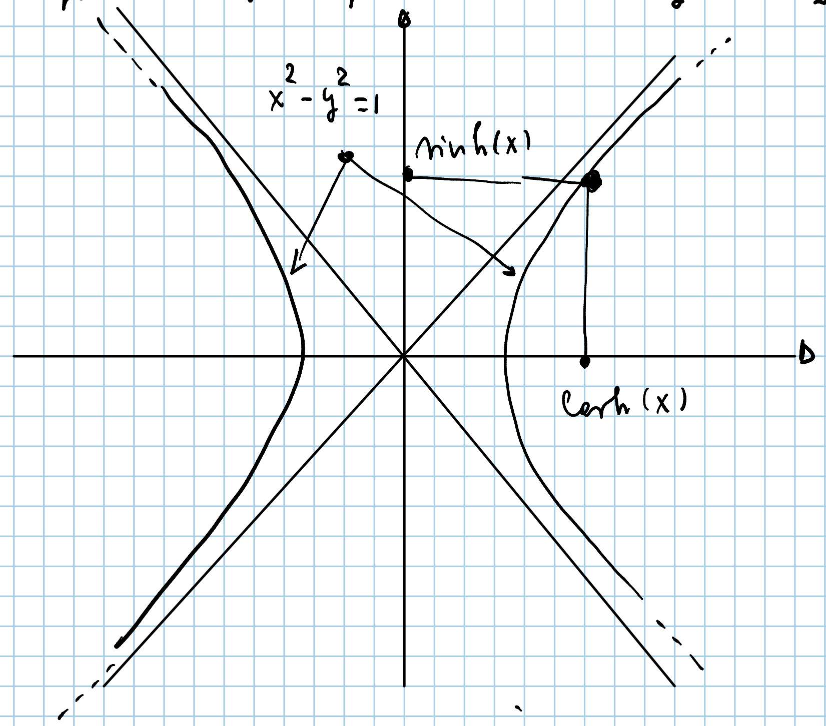
$$\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\cancel{e^{2x}} + 2 + \cancel{e^{-2x}}\right) - \frac{1}{4}\left(\cancel{e^{2x}} - 2 + \cancel{e^{-2x}}\right)$$

$$= \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ovvero i punti del piano $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ di coordinate $(\cosh(x), \sinh(x)) \in \mathbb{R}^2$ sono contenuti nel ramo destro dell'iperbole di equazione $x^2 - y^2 = 1$

$(\cosh(x), \sinh(x)) \in \mathbb{R}^2$ stanno contenuti nel ramo destro dell'iperbole di equazione $x^2 - y^2 = 1$



Potenze e Radici

Siano $x \in \mathbb{R}$ tale che $x \geq 0$ (la "base") ed $\alpha \in \mathbb{R}$ (l' "esponente"). Vogliamo definire la potenza

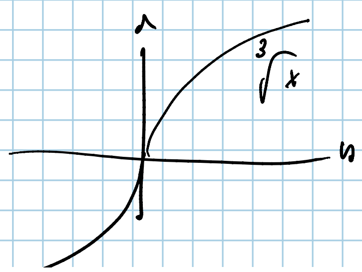
$$x^\alpha$$

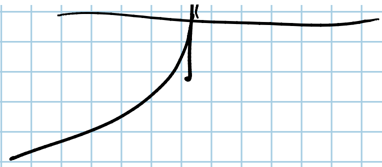
Ad esempio voglio dire chi è $(\sqrt{2})^\pi$.

Quando $\alpha \leq 0$ richiederemo $x > 0$.

- 0^0 non è definito
- 0^α con $\alpha < 0$ non è definito.

Osservazione x^α con $x < 0$ in generale non riusciamo a definirlo (ad es per $\alpha = 1/2$). Talvolta tuttavia la definizione è possibile, ad esempio $x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$ è possibile definirlo anche per $x < 0$





Convenzione: Poniamo $x^0 = 1 \quad \forall x > 0$ ($x \neq 0$ escluso)

Nel seguito $\alpha \neq 0$.

1° Passo $\alpha = n \in \mathbb{N}$: $n = 1, 2, 3 \ldots$

$$x^\alpha = x^n = \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ volte}}$$

2° Passo $\alpha = 1/n$ con $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

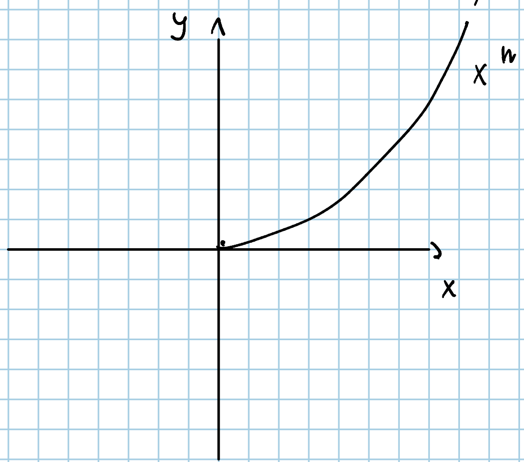
Consideriamo la funzione potenza n-esima $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$

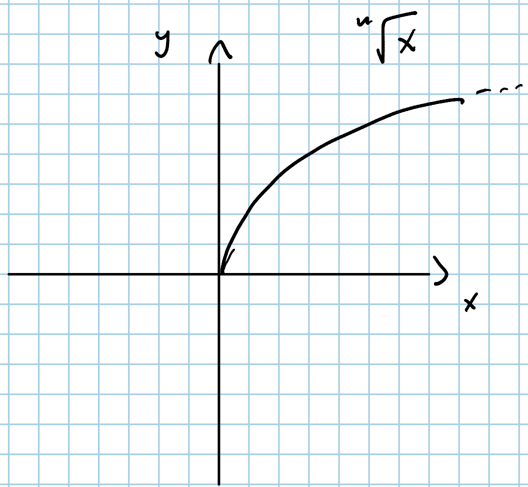
$$f(y) = y^n. \qquad y \geq 0$$

È 1-1 e su. Quindi esiste la funzione inversa $f^{-1} : [0, \infty) \to [0, \infty)$. Definiamo:

$$x^{\frac{1}{n}} = f^{-1}(x), \qquad x \geq 0$$

Notazione: $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$.





3° Passo Sia ora $\alpha = \frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{N}$ e $q \neq 0$

Definiamo

$$x^{\alpha} = x^{\frac{p}{q}} := \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^{p}.$$

Osservazione

1) Se $x > 1$. Allora la funzione $\alpha \mapsto x^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\alpha > 0$, è (strett.) crescente

2) Se $0 < x < 1$. Allora la funzione $\alpha \mapsto x^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{Q}$ $\alpha > 0$, è (strett.) decrescente.

4° Passo Voglio definire x^{α} quando $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$.

Se $x = 1$ definisco $1^{\alpha} = 1$.

Se $x > 1$ definisco

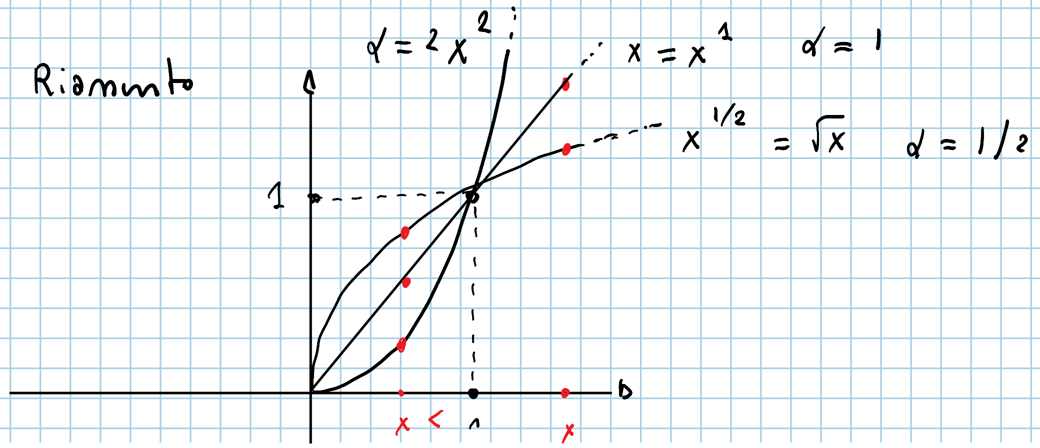
$$x^{\alpha} = \sup \left\{ x^{\beta} : \begin{array}{l} \beta < \alpha \\ \beta \in \mathbb{Q} \\ \beta > 0 \end{array} \right\} \in \mathbb{R}$$

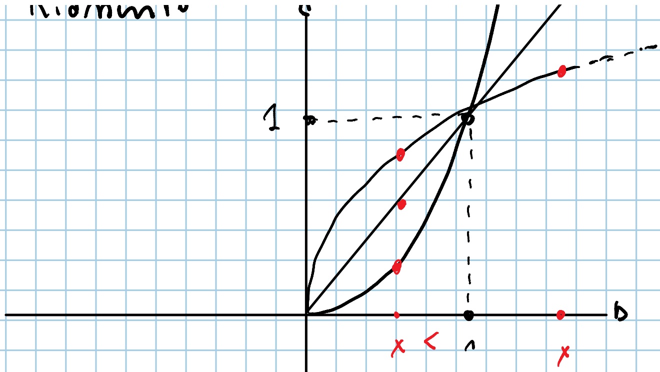
$$= \lim_{\substack{\beta \to \alpha \\ \beta < \alpha \\ \beta \in \mathbb{Q}}} x^{\beta}$$

Se $0 < x < 1$ definiamo

$$x^{\alpha} = \inf \left\{ x^{\beta} : 0 < \beta < \alpha \text{ e } \beta \in \mathbb{Q} \right\}$$

Disegno di Riassunto





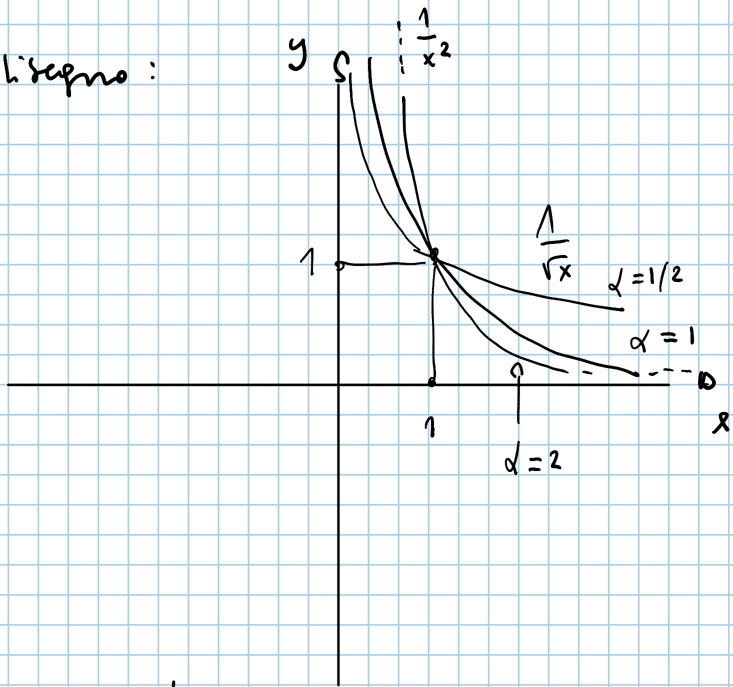
$x^{1/2} = \sqrt{x} \qquad \alpha = 1/2$

5° Passo Se $\alpha \in \mathbb{R}$ con $\alpha < 0$, allora definiamo

$$x^{\alpha} = \left(\frac{1}{x}\right)^{-\alpha} = \left(x^{-1}\right)^{-\alpha}$$

È definito perché $-\alpha > 0$.

Altro disegno:



Disegnamo la funzione $\left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha} = \frac{1}{x^{\alpha}}$

nei casi modello $\alpha = 1/2,\ 1,\ 2$

$x > 0$

Proprietà delle potenze

Teorema 1 Siano $x, y > 0$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Allora:

(1) $x^{\alpha+\beta} = x^{\alpha} \cdot x^{\beta}$;

(2) $(xy)^{\alpha} = x^{\alpha} \cdot y^{\alpha}$;

(3) $(x^{\alpha})^{\beta} = x^{\alpha \cdot \beta}$;

(4) $x^{-\alpha} = \dfrac{1}{x^{\alpha}}$.

Teorema 2 $x, y \in \mathbb{R}$ con $x, y > 0$, e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Allora:

(1) $0 < x < y$ e $\alpha > 0$ $\Rightarrow$ $x^\alpha < y^\alpha$;

(2) $0 < x < y$ e $\alpha < 0$ $\Rightarrow$ $x^\alpha > y^\alpha$;

(3) $x > 1$ e $\alpha < \beta$ $\Rightarrow$ $x^\alpha < x^\beta$;

(4) $0 < x < 1$ e $\alpha < \beta$ $\Rightarrow$ $x^\alpha > x^\beta$.

Esponenziali e logaritmi

Costruzione. Sia $a > 0$ un numero reale fissato.
La funzione $f_a : \mathbb{R} \to (0, \infty)$

$$f_a(x) = a^x, \quad \text{con } x \in \mathbb{R}$$

si chiama funzione esponenziale di base a.

Se $a \neq 1$ allora f_a è strett. monotona.