Lezione 18

mercoledì 20 novembre 2013
14:10

Esempio Funzione che NON ha limite.

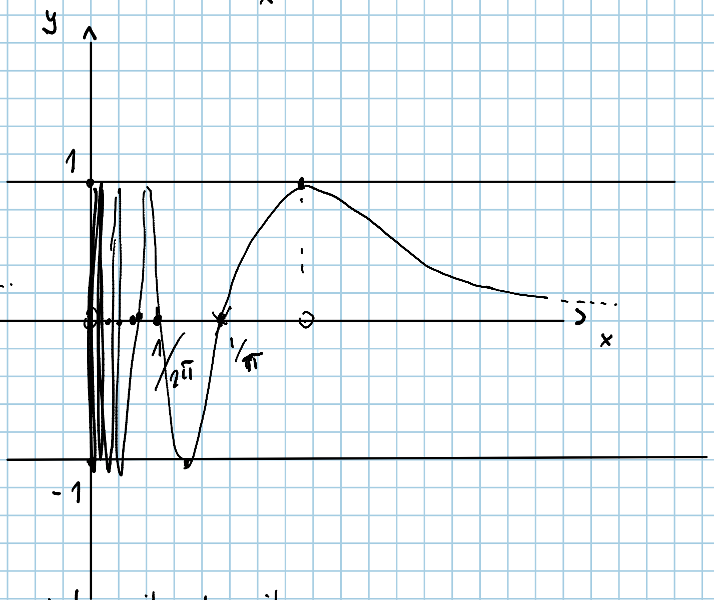
Si consideri $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad x > 0.$$

$\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \iff$

$\iff \frac{1}{x} = k\pi, \; k \in \mathbb{Z}, \; k \neq 0$

$x = \frac{1}{k\pi} \quad k = 1, 2, 3 \ldots$



Chiaramente NON esiste il limite

$$\lim_{x \to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

La funzione oscilla fra -1 e $+1$ infinite volte vicino al punto $x = 0$.

Definizione Sia $a \in \mathbb{R}$ finito e sia $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$.

Diciamo che la funzione f ha limite $L \in \mathbb{R}$ per x che tende a ∞ ($x \to \infty$) se:

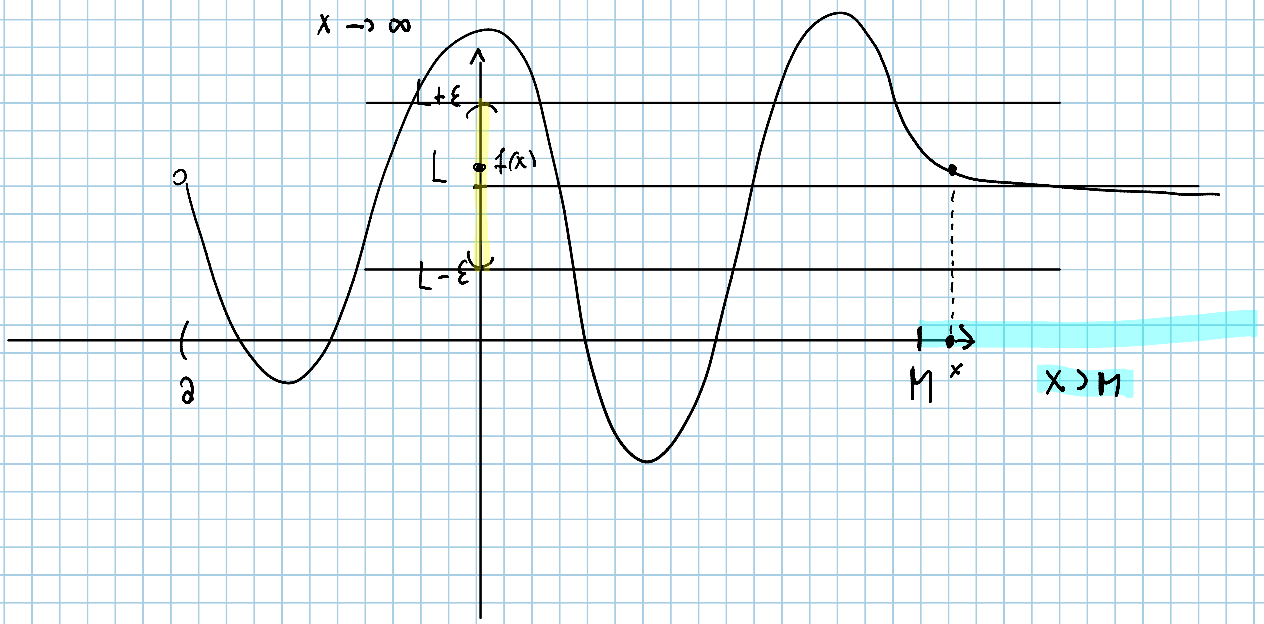
$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists M > 0 \text{ tale che } \forall x > M \implies |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

Scriveremo in questo caso:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L.$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L.$$



Osservazione Rimangono da definire queste situazioni:

1) $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$

2) $\lim_{x\to \infty} f(x) = \pm\infty$

3) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$ oppure $= \pm\infty$

Esercizio Usando la definizione verificare che:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x}{(1-x)^4} = +\infty .$$

Soluzione. Fissato $M>0$ ("grande") cerchiamo $\delta>0$ tale che
$\delta = \delta(M)$

$$|x-1| < \delta \implies f(x) > M .$$

Diseq.:

$$f(x) > M \iff \frac{x}{(1-x)^4} > M .$$

$\boxed{\text{Se scelgo } 0<\delta<\frac{1}{2}}$ allora

$$|x-1| < \delta < \frac{1}{2} \iff -\frac{1}{2} < x-1 < \frac{1}{2}$$

$$\iff \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$$

$$|x-1| < \delta < \frac{1}{2} \iff -\frac{1}{2} < x-1 < \frac{1}{2}$$

$$\iff \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$$

In questo caso:

$$\frac{x}{(1-x)^4} > \frac{1/2}{(1-x)^4} = \boxed{\frac{1}{2(1-x)^4} > M}$$

Risolvo questa diseq.

$$\boxed{} \iff \frac{1}{2M} > (1-x)^4$$

$$\iff \frac{1}{\sqrt[4]{2M}} > |1-x| \qquad \text{OK}$$

Ho capito come scegliere $\delta = \delta(M)$:

$$\delta = \min\left\{\frac{1}{\sqrt[4]{2M}}, \frac{1}{2}\right\}$$

In questo modo:

$$|x-1| < \delta \implies f(x) > M.$$

$\square$

<u>Operazioni con i limiti</u>

<u>Teorema</u> Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un p.to di accumulazione dell'insieme $A \subset \mathbb{R}$ e siano $f, g : A \to \mathbb{R}$. Supponiamo che esistano finiti i seguenti limiti

$$L = \lim_{x \to x_0} f(x),$$

$$M = \lim_{x \to x_0} g(x).$$

Allora si ha anche:

1) $\lim_{x \to x_0} f(x) + g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) = L + M$

2) $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = L \cdot M$

3) Se $M \neq 0$ allora avremo anche $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$.

Dim. Vedi succ. $\square$

Osservazioni:

(1) Il teorema precedente vale anche per $x_0 = \pm\infty$

(2) Il punto 1) vale anche con $L = \pm\infty$ e $M \in \mathbb{R}$ con la regola:

$$\pm\infty + M = \pm\infty$$

(3) Il punto 2) vale anche con $L = \pm\infty$ ed $M \in \mathbb{R}$ <u>MA</u> $M \neq 0$ con la regola

$$\pm\infty \cdot M = \pm\infty \quad \text{se } M > 0$$

$$\pm\infty \cdot M = \mp\infty \quad \text{se } M < 0.$$

(4) Se, infine, f è <u>limitata</u> e $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ allora

$$\lim_{x \to x_0} f(x)\, g(x) = 0.$$

<u>Esempi fondamentali</u>

(1) $\alpha \in \mathbb{R}$ parametro. Allora:

$$\lim_{x \to 0} |x|^{\alpha} = \begin{cases} 0 & \alpha > 0 \\ 1 & \alpha = 0 \\ +\infty & \alpha < 0 \end{cases}$$

(2) $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora

$$\lim_{x \to +\infty} x^{\alpha} = \begin{cases} +\infty & \alpha > 0 \\ 1 & \alpha = 0 \\ 0 & \alpha < 0 \end{cases}$$

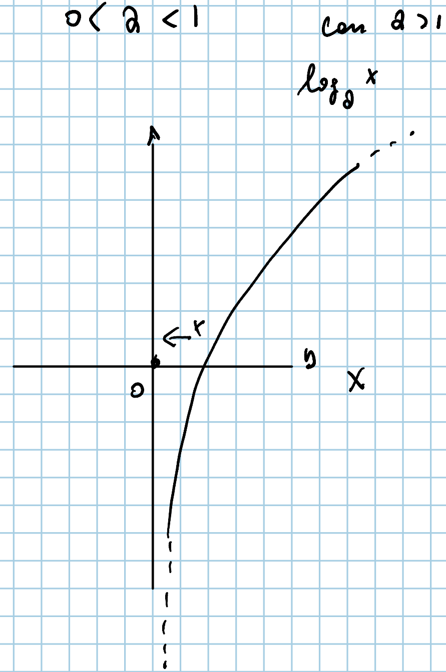
(3) Sia $a > 0$ una base fissata. Allora

$$\lim_{x \to \infty} a^{x} = \begin{cases} +\infty & a > 1 \\ 1 & a = 1 \\ 0 & 0 < a < 1 \end{cases}$$

(4) Sia infine $a > 1$. Allora

$$\lim_{x \to \infty} \log_a x = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty .$$



Teorema (del Confronto) Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un p.to di acc. dell'insieme $A \subset \mathbb{R}$ e siano $f, g, h : A \to \mathbb{R}$ tre funzioni tali che:

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in A .$$

Supponiamo che esistano e siano uguali i due limiti:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L = \lim_{x \to x_0} h(x) .$$

Allora si ha anche $\lim_{x \to x_0} g(x) = L$.

Dim. Vedi succ. □

Osservazione Si ha sempre:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \iff \lim_{x\to x_0} |f(x)| = 0 .$$

Limiti trigonometrici

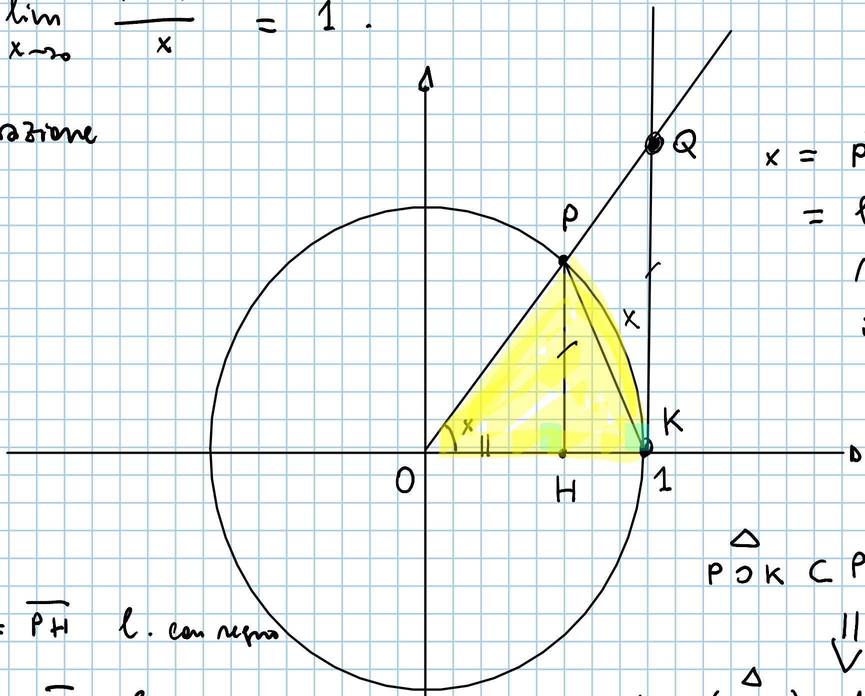
Teorema Si hanno:

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \sin(x) = 0$;

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1$;

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

Dimostrazione



$x = \overset{\frown}{POK}$ = lunghezza con segno dell'arco in radianti

Allora

$\sin x = \overline{PH}$ l. con segno

$\cos x = \overline{OH}$ l. con segno

$$\operatorname{tg}(x) = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\overline{PH}}{\overline{OH}} = \frac{\overline{QK}}{\overline{OK}} = \overline{QK}$$

$P\overset{\triangle}{O}K \subset P\overset{\frown}{O}K \subset Q\overset{\triangle}{O}K$

$\Downarrow$

$\text{Area}(P\overset{\triangle}{O}K) \leq \text{Area}(P\overset{\frown}{O}K) \leq$
$\leq \text{Area}(Q\overset{\triangle}{O}K)$

$\text{Area}(P\overset{\triangle}{O}K) = \frac{1}{2}\sin x$ $\quad$ $\text{Area}(P\overset{\frown}{O}K) = \frac{x}{2}$

$\text{Area}(Q\overset{\triangle}{O}K) = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$

Deduco che

Deduco che
$$\frac{1}{2}\sin x \le \frac{x}{2} \le \frac{\operatorname{tg} x}{2}$$

ovvero
$$\frac{\sin x}{x} \le 1 \qquad \cos x \le \frac{\sin x}{x}$$

$$\boxed{\sin x \le x \;\boxed{\le}\; \frac{\sin x}{\cos x}}$$

Dunque: Per $0 < x < \pi/2$ avremo
$$0 < \sin x \le x$$

ovvero per confronto: per $x \to 0^+$, $0 \to 0$, $\sin x \to 0$, $x \to 0$

$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0 \qquad (1)$$

Poi:
$$0 \le 1 - \cos x = \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x} = \frac{\sin^2 x}{1+\cos x} \le \frac{\sin^2 x}{1+1/2} = \frac{2}{3}\sin^2(x)$$

per $x \to 0$: $0 \to 0$, $\frac{2}{3}\sin^2(x) \to 0$

$\cos x \geq \frac{1}{2}$ per x vicino a 0

Per confronto
$$\lim_{x \to 0} (1-\cos x) = 0$$

Proviamo (3). Dal $\boxed{}$ trovo:
$$\cos x \le \frac{\sin x}{x} \le 1 \qquad \forall x \ne 0$$

per $x \to 0$: $\cos x \to 1$, $1 \to 1$

Per confronto:
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \qquad \square$$

<u>Esercizio</u> Calcolare il seguente limite:
$$L = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x \,(1-\cos x)}{x^3} \qquad \text{F I } \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\cos x} \frac{1}{x^3} \frac{\sin^2 x}{1+\cos x} = \lim_{x\to 0} \boxed{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3} \frac{1}{\cos x \;(1+\cos x)}$$

ORA

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x\,(1+\cos x)} = \frac{1}{2}$$

Concludo che $\quad L = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$ $\square$