Lezione 2

mercoledì 9 ottobre 2013
14:17

<u>Definizione</u> Sia $A \subset \mathbb{R}$.

i) Un numero $y \in \mathbb{R}$ è un minorante di A se

$$y \leq x \quad \forall x \in A$$

ii) A si dice inferiormente limitato se ha almeno un minorante

iii) Un numero $x \in \mathbb{R}$ si dice <u>estremo inferiore</u> di A se x è il più grande dei minoranti di A.

Ovvero :
- $x \leq y \quad \forall y \in A$ (x è un minorante)
- $\forall \underline{\varepsilon > 0} \ \exists y \in A$ tale che $\underline{y < x + \varepsilon}$

Scriveremo in questo caso:

$$x = \inf A .$$

iv) Se A non è inferiormente limitato scriveremo

$$\inf A = -\infty$$

v) Se $x \in \mathbb{R}$ verifica : • $x = \inf A$ • $x \in A$
allora diremo che x è il minimo di A
e scriveremo

$$x = \min A .$$

Esercizio 1 Verificare che l'insieme

$$A = \{ 2n - n^2 \in \mathbb{R} \,:\, n \in \mathbb{N} \}$$

NON è inferiormente limitato. Dove $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$.

Soluzione. Dobbiamo verificare che $\inf A = -\infty$, ovvero che A NON ha minoranti.

Precisamente voglio verificare che:

$$\forall M > 0 \;\; \exists x \in A \;\; \text{tale che} \;\; x < -M.$$

Ovvero

$$\forall M > 0 \;\; \exists n \in \mathbb{N} \;\; \text{tale che} \;\; 2n - n^2 < -M$$

Studio la disequazione:

$$2n - n^2 < -M \iff n^2 - 2n > M$$

$$\iff n^2 - 2n + 1 > M + 1$$

$$\iff (n-1)^2 > M + 1$$

$$\iff n - 1 > \sqrt{M+1}$$

oppure $n - 1 < -\sqrt{M+1}$

Basta considerare $n - 1 > \sqrt{M+1} \iff n > 1 + \sqrt{M+1}$

Ho dimostrato che $\forall M$ trovo soluzioni $n \in \mathbb{N}$ della diseq. $2n - n^2 < -M$.

$\square$

Esercizio 2 Sia $A = \{ n - \sqrt{n^2-1} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N} \}$ dove $\mathbb{N} = \{1, 2 \dots\}$. Calcolare, se esistono, $\sup A$, $\max A$, $\inf A$ e $\min A$.

Soluzione. Osservo che:

$$n - \sqrt{n^2-1} = (n - \sqrt{n^2-1}) \cdot \frac{n + \sqrt{n^2-1}}{n + \sqrt{n^2-1}} =$$

$$= \frac{\cancel{n^2} - (\cancel{n^2} - 1)}{n + \sqrt{n^2-1}} = \frac{1}{n + \sqrt{n^2-1}}$$

Osservo che $f(n) = \underset{\nearrow}{n} + \sqrt{\underset{\nearrow}{n^2} - 1}$ è crescente

Quindi $1/f(n)$ è decrescente.

Deduco che

$$\frac{1}{n + \sqrt{n^2-1}} \leq \frac{1}{1 + \sqrt{1-1}} = 1$$

Dunque 1 è un maggiorante di A.

Ma $1 \in A$ (si ottiene con $n = 1$).

E dunque $1 = \max A = \sup A$.

Studiamo $\inf A$. Provo a dimostrare che

$$\inf A = 0$$

- 0 è un minorante? SI.

• 0 è un minorante? SÌ.

$$\frac{1}{n+\sqrt{n^2-1}} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

• Dimostro che $0+\varepsilon$ con $\varepsilon>0$ <u>NON</u> è un minorante di A:

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists x \in A \text{ tale che } x < \varepsilon$$

Ovvero devo verificare che:

Diseq. con parametro.

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists n \in \mathbb{N} \text{ tale che } \frac{1}{n+\sqrt{n^2-1}} < \varepsilon$$

Disequazione:

$$\frac{1}{n+\sqrt{n^2-1}} < \varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon} < n+\sqrt{n^2-1}$$

BANALE: Basta prendere $n > \frac{1}{\varepsilon}$ di modo tale che

$$\frac{1}{\varepsilon} < n \leq n+\sqrt{n^2-1}$$

Questo prova che $0 = \inf A$.

Rimane da dire se $0 = \min A$.

Domanda: $0 \in A$? Dovrei avere

$$0 = \frac{1}{n+\sqrt{n^2-1}}$$ NON ha soluzioni

Dunque A NON ha minimo.

$\square$

Assioma di Completezza:

(AC) Ogni insieme $A \subset \mathbb{R}$ non vuoto e superiormente limitato ha un estremo superiore.

Proposizione (Proprietà di Archimede).
Siano $x, y \in \mathbb{R}$ due numeri reali tali che $x, y > 0$.
Allora esiste un numero naturale $n \in \mathbb{N}$ tale che

$$nx > y.$$

Dim. Per assurdo supponiamo che $nx \leq y \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
Considero l'insieme

$$A = \{ nx \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N} \}$$

y è magg. di $A \Rightarrow A$ è sup. limitato $\overset{(AC)}{\Rightarrow}$ esiste $\bar{x} = \sup A$, $\bar{x} \in \mathbb{R}$.
$A \neq \emptyset$

Dunque $\bar{x}$ verifica:

i) $\bar{x}$ è magg. di A ovvero: $nx \leq \bar{x} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

ii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n \in \mathbb{N}$ tale che $\bar{x} - \varepsilon < nx$.

Scelgo $\varepsilon = x > 0$ e poi prendo $n \in \mathbb{N}$ che rende vera l'affermazione ii) ovvero $\underline{\underline{\bar{x} - x}} = \bar{x} - \varepsilon < nx$. $\Leftarrow$

Dal punto i) sappiamo che (ora n è fissato)

$$(n+1)\, x \leq \bar{x}$$

Riparto:

$$\bar{x} \geq (n+1)\, x = nx + \underline{\underline{x}} > \bar{x} - x + x = \bar{x}.$$

Assurdo. Fine Dimostrazione.

Densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$.

Prop. Per ogni coppia di numeri reali $x, y \in \mathbb{R}$ tali che $x < y$ esiste sempre $q \in \mathbb{Q}$ tale che

$$x < q < y.$$

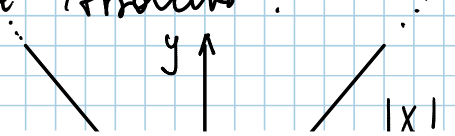
Dim. Omessa si usa la Prop. di Archimede.

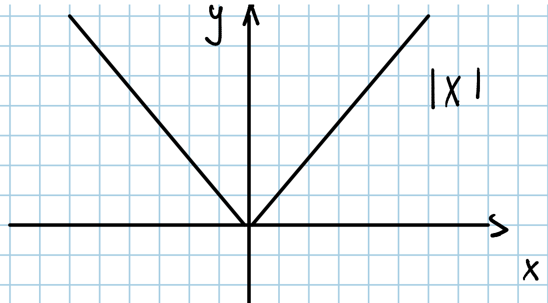
Valore Assoluto

La funzione modulo o valore assoluto su $\mathbb{R}$ è la funzione $|\cdot| : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ così definita:

$$|x| = \max\{x, -x\} = \begin{cases} x & x \geq 0, \\ -x & x \leq 0. \end{cases}$$

Grafico del valore Assoluto:





Proprietà:

- $x \le |x|$ e $-x \le |x|$
- $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ e $|x| = 0 \iff x = 0$
- $|x| = |-x| \quad \forall x$
- $|x+y| \le |x| + |y|$

Verifica:

$$x+y \le |x| + |y|$$

Poi

$$\boxed{-(x+y)} = -x - y \le |x| + |y|$$

Concludo

$$|x+y| = \max\{x+y, -(x+y)\} \le |x| + |y|$$

- Altro conto:

$$|x| = |(x-y)+y| \overset{\text{punto precedente}}{\le} |x-y| + |y|$$

Riordino

$$\boxed{|x| - |y| \le |x-y|}$$

Analog. $|y| - |x| \le |x-y|$

Infine trovo

$$\big|\, |x| - |y| \,\big| \leq |x-y| \qquad \forall\, x,y \in \mathbb{R}$$

Distanza su $\mathbb{R}$ Definiamo la distanza fra due numeri reali $x,y \in \mathbb{R}$ in questo modo:

$$d(x,y) = |x-y|$$

Proprietà

(1) $d(x,y) \geq 0$ e $d(x,y) = 0 \iff x = y$

(2) $d(x,y) = d(y,x)$

(3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ Dis. Triang.

La coppia $(\mathbb{R}, d)$ si dice Spazio Metrico.

NUMERI COMPLESSI

Introduciamo il simbolo $i = \sqrt{-1}$ ovvero i ubbidisce alla regola $i^2 = -1$ (unità immaginaria).

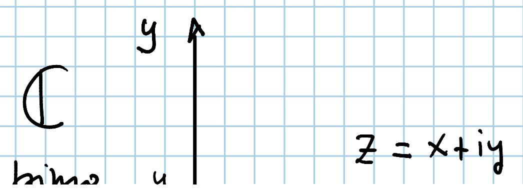
I numeri complessi sono l'insieme

$$\mathbb{C} = \{ x + iy \; : \; x, y \in \mathbb{R} \}.$$

Il numero complesso $z = x+iy$ può essere identificato con il punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ piano Cartesiano.

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$$

$z = x+iy$



$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R} = \mathbb{C}$