Lezione 20

venerdì 22 novembre 2013
11:14

MANCA LA PRIMA ORA

Sviluppi delle funzioni elementari

$\boxed{\text{Per } x \to 0}$

(1) $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$

(2) $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$

(3) $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$

(4) $\sinh x = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{7!}x^7 + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$

(5) $\cosh x = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$

(6) $\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$

(7) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)x^2 + o(x^2)$

(8) $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)x^2 + o(x^2)$

(9) $\operatorname{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$.

Commenti

(1) f funzione dispari $\Rightarrow$ appaiono solo potenze dispari

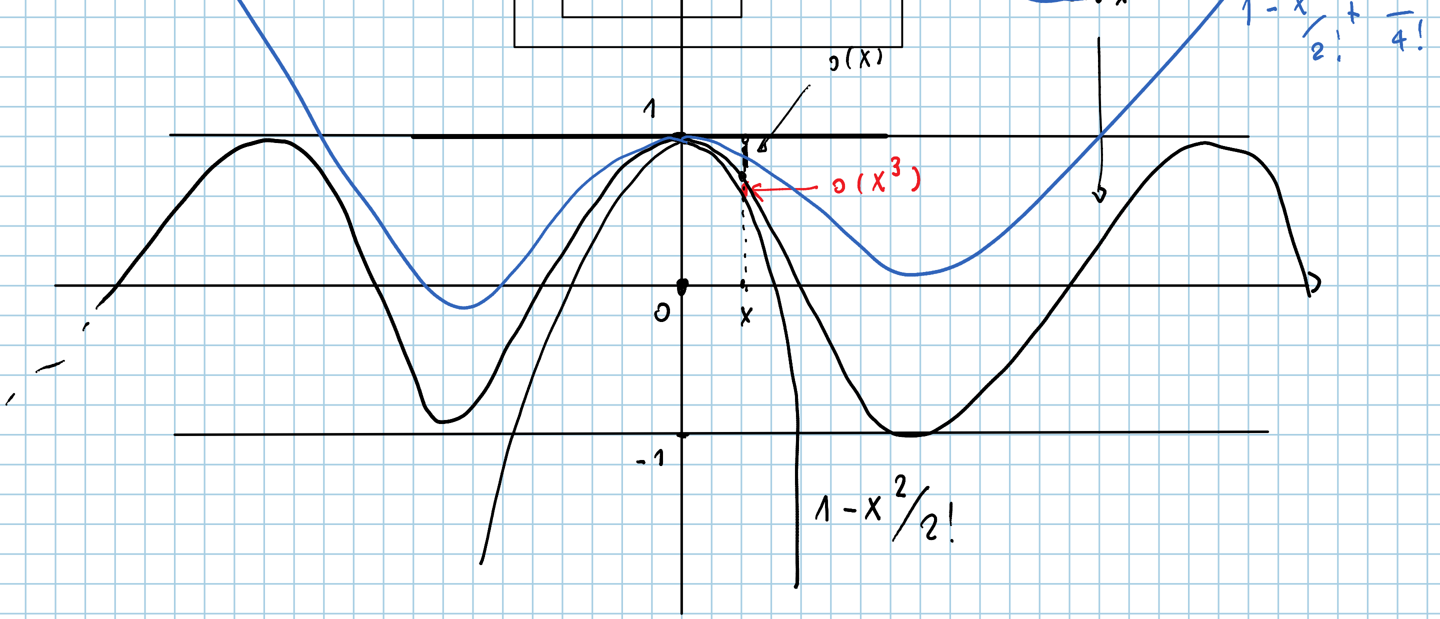
f " pari $\Rightarrow$ " " " pari

(2) La funzione $\log x$ **NON** ha sviluppo per $x \to 0^+$

(3) Significato geometrico degli sviluppi.

Ad esempio prendiamo

$$\cos x \underset{x \to 0}{=} \boxed{\boxed{1 - \frac{x^2}{2!}} + \frac{x^4}{4!}} + \underset{x \to 0}{o(x^5)}$$



Esercizio

(1) Sviluppare la funzione $[\log(1+x)]^2$ per $x \to 0$ in modo preciso fino al terzo ordine.

(2) Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ calcolare il limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{\alpha x^2} - \cos x + [\log(1+x)]^2}{x^3}.$$

Svolgimento:

(1) Per $x \to 0$ ho lo sviluppo noto:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \qquad x \to 0$$

Quadrato

$$(\log(1+x))^2 = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^2$$

$$= \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2$$

$$= x^2 + \frac{1}{4}x^4 + o(x^2)^2 - \boxed{\cancel{2}}\,x \cdot \frac{1}{\cancel{2}}x^2 + 2x \cdot o(x^2) - 2\frac{x^2}{2} \cdot o(x^2)$$

$$= x^2 + \overbrace{\boxed{\frac{1}{4}x^4}}^{=o(x^3)} + o(x^4) - x^3 + 2o(x^3) - o(x^4)$$

$$= x^2 + o(x^3) + o(x^4) - x^3 + o(x^3) + o(x^4)$$

$$= x^2 - x^3 + o(x^3).$$