Lezione 23

venerdì 29 novembre 2013
10:15

TEOREMA Se $f, g : A \to \mathbb{R}$ sono funzioni continue su A allora anche $f+g$ e $f \cdot g$ sono continue su A. Se poi $g \neq 0$ in ogni p.to di A, allora anche f/g è cont. su A.

Dim. Si riduce al teor. sui limiti. $\square$

TEOREMA Le funzioni x^α, $\alpha \in \mathbb{R}$ fissato, $\sin x$, $\cos x$ e a^x con $a>0$ fissata, sono continue nel loro dominio.

Dim. Provo che $f(x) = \sin x$ è cont. nel punto $x_0 = 0$.
Già fatto:

$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0 = \sin(0) .$$

Ora provo che $f(x) = \sin x$ è cont. nel generico punto $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{h \to 0} \sin(x_0 + h) = \lim_{h \to 0} \Big(\sin(x_0) \underbrace{\cos(h)}_{\xrightarrow{h \to 0} 1} + \underbrace{\sin(h)}_{\xrightarrow{h \to 0} 0} \cos(x_0) \Big)$$

$$= \sin(x_0) \cdot 1 + 0 \cdot \cos(x_0)$$

$$= \sin(x_0) .$$

Ora proviamo che $x \mapsto e^x$ è continua su $\mathbb{R}$.
Parto dal punto $x_0 = 0$. Vorrei provare che

$$\lim_{x \to 0} e^x = 1 .$$

Noi sappiamo che

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{e} = \lim_{n \to \infty} e^{\frac{1}{n}} = 1$$

Dunque $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \ \forall n \geq \bar{n}$ avremo

$$e^{\frac{1}{\bar{n}}} - 1 = \left| e^{\frac{1}{\bar{n}}} - 1 \right| < \varepsilon$$

La funzione $x \mapsto e^x$ è crescente. Quindi per $0 < x \leq \frac{1}{\bar{n}}$ avremo:

$$e^x - 1 < e^{\frac{1}{\bar{n}}} - 1 < \varepsilon$$

Vale $\forall x \in (0, \delta)$

con $\delta = \frac{1}{\bar{n}}$

Dunque $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = 1/\bar{n}$

$$0 < x < \delta \implies \left| e^x - 1 \right| < \varepsilon$$

E per $x < 0$ sarà analogo. Salto.

Più in generale

$$\lim_{h \to 0} e^{x_0 + h} = \lim_{h \to 0} e^{x_0} \cdot \underbrace{e^h}_{\to 1} = e^{x_0}.$$

$\square$

TEOREMA (degli zeri) Sia $A = [a, b] \subset \mathbb{R}$ con $-\infty < a < b < \infty$, e sia $f : A = [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su A tale che $f(a) < 0$ ed $f(b) > 0$. Allora esiste almeno un punto $x_0 \in (a, b)$ tale che $f(x_0) = 0$.

Dim. Definiamo l'insieme

$$B = \{ x \in A = [a, b] : \underline{f(x) < 0} \} \neq \emptyset$$

$B \neq A$ in quanto $b \notin B$. $\qquad a \in B$

Ora definisco

$$x_0 := \sup B \,, \qquad x_0 \in A \text{ certamente.}$$

Affermo che $f(x_0) = 0$.

Considero i punti $x_0 + 1/n = x_n \notin B$

e dunque

$$f(x_n) \boxed{\geq 0} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Deduco che

$$\underbrace{f(\lim_{n\to\infty} x_n)}_{= f(x_0)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{uso la} \\ \text{cont. di } f}}{=} \lim_{n\to\infty} f(x_n) \geq 0$$

permanenza del segno

—

Siccome $x_0 = \sup B$ allora $\forall n \in \mathbb{N}$ esiste $y_n \in B$ tale che

$$x_0 - \frac{1}{n} < y_n < x_0$$

Ovviamente $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$. Inoltre

$$f(y_n) < 0 \qquad \forall n$$

Al limite + P. segno

$$f(x_0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{cont.}}}{=} \lim_{n\to\infty} f(y_n) \leq 0 .$$

Conclusione

$$\left.\begin{array}{l} f(x_0) \leq 0 \\ f(x_0) \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x_0) = 0 .$$

$\square$

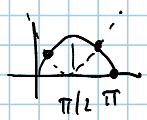
TEOREMA (Valori intermedi) Sia $A = [a,b] \subset \mathbb{R}$ intervallo e sia $f : A \to \mathbb{R}$ continua. Allora per ogni $y \in \mathbb{R}$

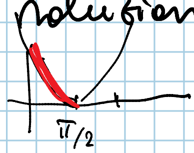
tale che
$$\inf_A f < y < \sup_A f$$
esiste almeno un $x \in A$ tale che $f(x) = y$.

Dim. RINVIO.

<u>Esercizio</u> Verificare che l'equazione
$$\sin x = \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2, \qquad x \in [0,\pi]$$
ha esattamente due soluzioni su $[0,\pi]$.

Soluzione





$$f(x) = \sin(x) - \left(x - \pi/2\right)^2 \qquad x \in [0,\pi]$$

Certamente f è cont. su $[0,\pi]$.

In $[0,\pi/2]$ abbiamo:
$$f(0) = \sin(0) - \left(0 - \pi/2\right)^2 = -\frac{\pi^2}{4} < 0$$
$$f(\pi/2) = \sin(\pi/2) - (0-0)^2 = 1 > 0$$

Dal teorema degli zeri esiste <u>almeno</u> <u>un</u> punto $x \in (0,\pi/2)$ tale che $f(x) = 0$.

Osservo che su $[0,\pi/2]$ $\sin$ è strett. crescente
$-\left(x-\pi/2\right)^2$ è strett. crescente

Quindi f è strett. crescente su $[0,\pi/2]$.
Quindi f ha <u>un solo</u> zero in $(0,\pi/2)$.

In modo analogo c'è un solo zero di f in $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.
□

Dim. del teorema dei valori intermedi.

Considero $g(x) = f(x) - y$.

Siccome $\inf_A f < y < \sup_A f$ allora esistono due punti $x_0, x_1 \in A$ tali che

$$\inf_A f < f(x_0) < y \quad e \quad y < f(x_1) < \sup_A f$$

(Esistono per la def. di $\inf_A f$ e $\sup_A f$).

Ora:

$$g(x_0) = f(x_0) - y < 0$$

$$g(x_1) = f(x_1) - y > 0$$

Quindi per il teorema degli zeri esiste $x \in [x_0, x_1] \subset A$ tale che $g(x) = 0$ ovvero $f(x) = y$. $\square$

<u>Esercizio</u> Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione così definita:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha \cos x + \log(\beta + x^2) & x < 0 \\ \sqrt{x} + \beta x & 0 \leq x \leq 1 \\ x^3 + e^{\alpha x} & x > 1 \end{cases}$$

Determinare, se esistono, i parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che f sia cont. su tutto $\mathbb{R}$.

Soluzione. Deve essere $\beta \geq 0$.

Su $(-\infty, 0)$ f è cont.

Su $[0, 1]$ f è cont.

su $(1, \infty)$ f è cont.

Devo controllare la cont. nei punti di raccordo $x = 0$ ed $x = 1$

Devo imporre le seguenti condizione:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) \overset{\downarrow}{=} \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 0$$

$$\lim f(x) = \lim f(x) = f(1) = 1 + \beta$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = 1+\beta$$

Esplicito

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^2 + \alpha\cos x + \log(\beta + x^2)$$

$$= 0 + \alpha \cdot 1 + \log(\beta + 0)$$

$$= \alpha + \log\beta$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} + \beta x = 0 = f(0)$$

Prima condizione:

$$\alpha + \log\beta = 0$$

In $x=1$:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \sqrt{x} + \beta x = \sqrt{1} + \beta\cdot 1$$
$$= 1 + \beta = f(1)$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x^3 + e^{\alpha x} = 1 + e^{\alpha}$$

Seconda condizione:

$$1+\beta = 1 + e^{\alpha}$$

Metto a sistema

$$\begin{cases} \alpha + \log\beta = 0 \\ \cancel{1}+\beta = \cancel{1} + e^{\alpha} \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha + \log\beta = 0 \\ \beta = e^{\alpha} \end{cases}$$

Sost. 2^ Eq. nella 1^ Eq.:

$$\alpha + \log e^{\alpha} = 0 \iff \alpha + \alpha = 0$$

$\Longleftrightarrow \quad \alpha = 0$

Da cui $\beta = 1$.

Esercizio Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^3 x}{(x^3 + x^2)^{3/2}}$$

x^3 se $x > 0$

Conti

$$(x^3 + x^2)^{3/2} = \left(x^2 (x+1)\right)^{3/2} = (x^2)^{3/2} (x+1)^{3/2}$$

Dunque

$$L_+ = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin^3 x}{(x^3+x^2)^{3/2}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin^3 x}{x^3 (1+x)^{3/2}} = +1$$

$$L_- = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin^3 x}{(x^3+x^2)^{3/2}} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin^3 x}{(-x)^3 (1+x)^{3/2}} \underset{x<0}{=} -1$$

$$(x^2)^{3/2} = \left(\sqrt{x^2}\right)^3 = |x|^3 = (-x)^3$$

Siccome $L_+ \neq L_-$ allora il limite NON esiste.

TEOREMA (Cont. della funzione composta) Siano $f : A \to B$ una funzione continua su A e $g : B \to C$ una funzione cont. su B. Allora la funzione composta $g \circ f : A \to C$ è cont. su A.

Dim. Prox settimana.

TEOREMA (Cont. della funzione inversa) Sia $A = [a,b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua un intervallo e sia $f: A \to \mathbb{R}$ una funzione continua e iniettiva. Allora:

(1) f è strettamente monotòna (crescente opp. decrescente).
(2) L'immagine $f(A) \subset \mathbb{R}$ è un intervallo
(3) La funzione inversa $f^{-1}: f(A) \to A$ è continua.

Dim. Omessa.

<u>COROLLARIO</u> Le funzioni arcsin, arccos, arctg, log sono continue nel loro dominio.