Lezione 24

mercoledì 4 dicembre 2013
14:16

Cont. della funz. composta:

$$f: A \to B \quad \text{cont. in } x_0 \in A$$

$$g: B \to C \quad \text{cont. in } y_0 = f(x_0) \in B$$

Vogliamo provare che $g \circ f: A \to C$ è cont. in $x_0 \in A$.

Dunque, fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\eta > 0$ tale che

(1) $\forall y \in B \quad |y - y_0| = |y - f(x_0)| < \eta \implies \underbrace{|g(y) - g(y_0)|}_{= g(f(x_0))} < \varepsilon.$

Siccome f è cont. in x_0:

(2) $\forall \eta > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c. $\underset{x \in A}{|x - x_0| < \delta} \implies |f(x) - f(x_0)| < \eta$

Da (1) + (2) segue che:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \underset{x \in A}{|x - x_0| < \delta} \implies |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon.$$

$\square$

CALCOLO DIFFERENZIALE

Derivata di funzione

Def Diciamo che una funzione $f: A \to \mathbb{R}$, con $A \subset \mathbb{R}$, è derivabile nel punto $x_0 \in A$ se esiste finito il seguente limite

$$\lim \frac{f(x) - f(x_0)}{x - \dots} = f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = Df(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = Df(x_0)$$

Chiameremo il numero $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ la derivata di f nel punto $x_0 \in A$.

Osservazione

$$f \text{ è derivabile in } x_0 \Rightarrow f \text{ è continua in } x_0$$

$\not\Leftarrow$ FALSO

Infatti se f è deriv. allora

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + o(1)$$

dove $o(1) \to 0$ per $x \to x_0$. Trovo

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + (x - x_0)\, o(1)$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + o(x - x_0)$$

dove $\frac{o(x - x_0)}{x - x_0} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$

Al limite

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) = f(x_0).$$

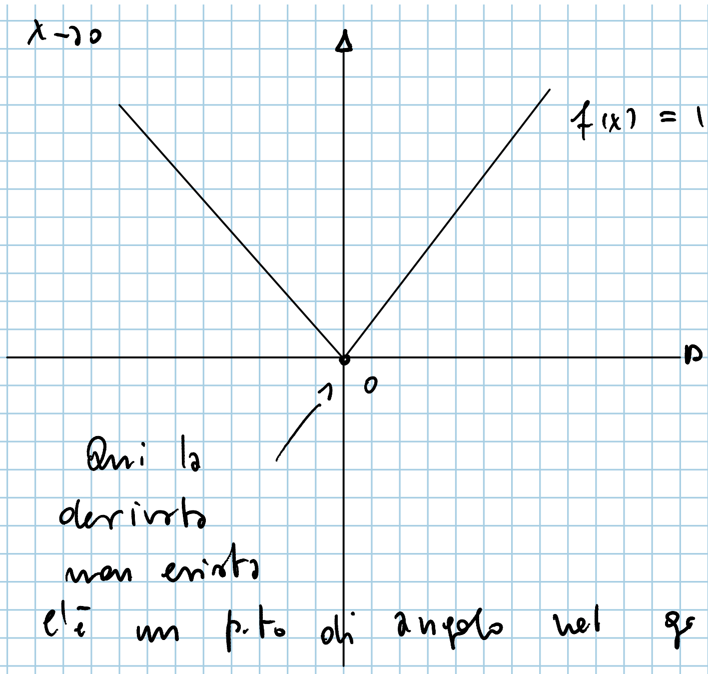
Al contrario, la funzione $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, è cont. in $x_0 = 0$. Ma in $x_0 = 0$ f NON derivabile:

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0} 1 = +1$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \to 0^-} -1 = -1$$

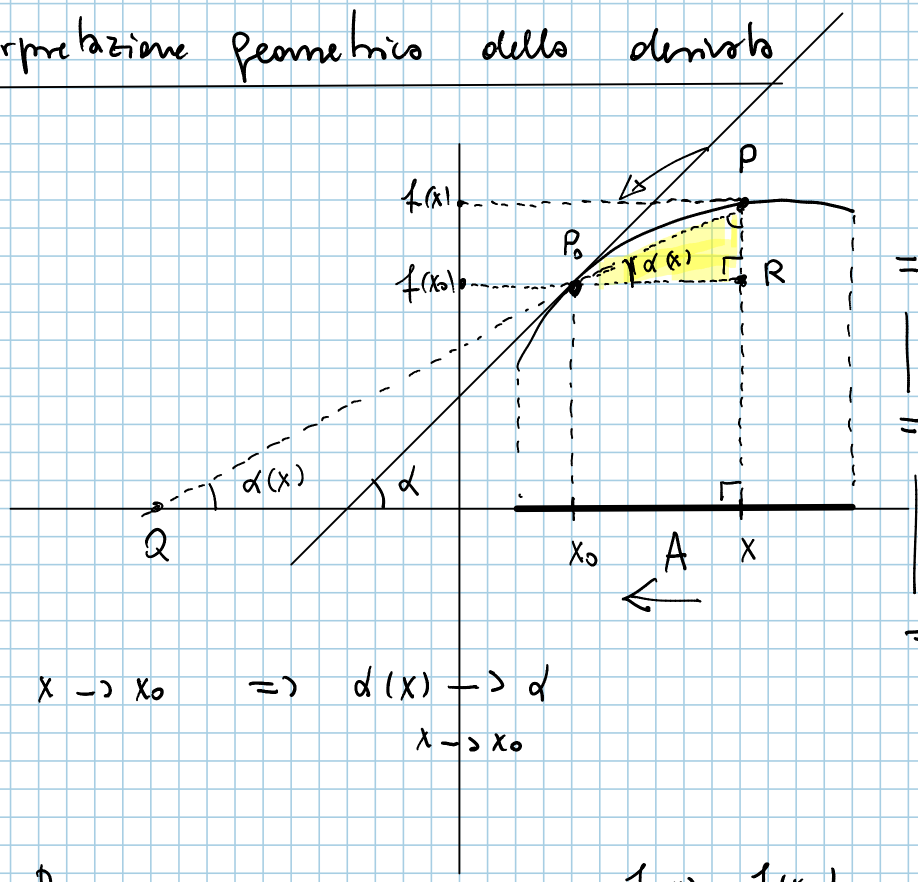
Dunque $\lim_{x \to 0} \ldots$ NON esiste.

$x \to 0$



c'è un p.to di angolo nel gr(f).

Interpretazione geometrica della derivata



$$= \frac{\overline{PR}}{\overline{P_0R}} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \frac{\sin(\alpha(x))}{\cos(\alpha(x))}$$

$$= tg(\alpha(x))$$

$x \to x_0 \Rightarrow \alpha(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \alpha$

Dunque

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} tg(\alpha(x))$$

$$= tg(\alpha).$$

Definizione (Retta tangente) Sia $f : A \to \mathbb{R}$ derivabile nel punto $x_0 \in A$. La retta di equazione

$$y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$$

si dice retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0)) \in gr(f)$.

Derivate delle funzioni elementari

(1) Funzioni costanti. Se $f(x) = \alpha \in \mathbb{R}$ costante allora

$$Df(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\overset{\alpha}{f(x+h)} - \overset{\alpha}{f(x)}}{h} = 0.$$

(2) Monomi. $Dx^n = n x^{n-1}$.

$$f(x+h) - f(x) = (x+h)^n - x^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k h^{n-k} - x^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^k h^{n-k}$$

Divido per h e trovo:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^k h^{n-k-1}$$

$$= \underbrace{\binom{n}{n-1}}_{=\frac{n!}{1!\,(n-1)!} = n} x^{n-1} + \boxed{\sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} x^k h^{n-k-1}}$$

Per $h \to 0$

$$Dx^n = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = n x^{n-1} + \lim_{h\to 0} \overset{0}{\overset{\|}{\boxed{}}}$$

$$= n x^{n-1}.$$

3. Seno. $D \sin x = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$. Formule addizione:

$$\sin(x+h) = \sin x \cos h + \sin h \cos x$$

Dunque

$$D \sin x = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \sin x \underbrace{\frac{\cos h - 1}{h}}_{\to 0} + \cos x \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\to 1}$$

$$= \cos x .$$

4. Coseno : $D \cos x = -\sin x, \quad x \in \mathbb{R}.$

Conti simili

5. Esponenziale. Sia $a>0$ una base fissata. Allora

$$D\, a^x = a^x \cdot \log a \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Verifica: $$\boxed{\frac{a^{x+h} - a^x}{h}} = \frac{a^x a^h - a^x}{h} = a^x \, \frac{a^h - 1}{h}$$

Calcolo con sostit. il limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \, \frac{\log a}{\log(1+1/t)} =$$

Poniamo

$$t = \frac{1}{a^h - 1} \iff a^h - 1 = \frac{1}{t} \iff a^h = 1 + \frac{1}{t}$$

$h \to 0^+$

$$h \to 0^+ \implies t \to +\infty \qquad \iff a^h = 1 + \frac{1}{t}$$
$$\iff h \log a = \log\left(1 + \frac{1}{t}\right)$$
$$\iff h = \log\left(1+\frac{1}{t}\right) \Big/ \log a$$

$$\circledast = \lim_{t\to\infty} \frac{\log a}{\log\left(1+\frac{1}{t}\right)^t} = \frac{\log a}{\log e} = \log a$$

6. In particolare $D\, e^x = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

7. Logaritmo. $D \log|x| = \boxed{\frac{1}{x}} \quad \forall x \neq 0$.

Verifica:
$$\lim_{h\to 0} \frac{\log|x+h| - \log|x|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\log\left|\frac{x+h}{x}\right|}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\log\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h} \overset{\text{Sost.}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{t}{x\,(e^t - 1)} = \circledast$$

Chiamo $t = \log\left(1 + \frac{h}{x}\right) \iff e^t = 1 + \frac{h}{x}$

$h \to 0 \implies t \to 0 \qquad \iff e^t - 1 = \frac{h}{x}$

$$\iff h = x\,(e^t - 1)$$

$$\circledast = \lim_{t\to 0} \frac{1}{x} \frac{1}{\frac{e^t - 1}{t}} = \frac{1}{x}.$$

8. Seno iperbolico. $D \sinh x = \cosh x \quad x \in \mathbb{R}$:
$$D \sinh x = D \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2} D(e^x - e^{-x})$$

$$D \sinh x = D \frac{\phantom{e^x - e^{-x}}}{2} = \frac{1}{2} D(e^x - e^{-x})$$

$$= \frac{1}{2}\left(De^x - D\left(e^{-x}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \cosh(x).$$

9. Coseno iperbolico. $D \cosh x = \sinh x, \quad x \in \mathbb{R}.$

10. $D|x| = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \quad x \neq 0.$

Operazioni sulle derivate

TEOR. Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$ due funzione derivabili su A. Allora per ogni $x \in A$ si ha:

1) $D(f+g)(x) = Df(x) + Dg(x)$;

- 2) $D(f \cdot g)(x) = g(x) \cdot Df(x) + f(x)\, Dg(x)$;
- 3) Se $g \neq 0$ su A allora:

$$D\left(\frac{1}{g}\right)(x) = -\frac{Dg(x)}{g(x)^2}$$

4) Se $g \neq 0$ su A allora:

$$D\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{g(x)\, Df(x) - f(x)\, Dg(x)}{g(x)^2}$$

Dim. Provo 2)

$$D(f \cdot g)(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)\, g(x+h) - f(x) \cdot g(x+h) + f(x)\, g(x+h) - f(x)\, g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \Bigg(\underbrace{g(x+h)}_{\downarrow\, h \to 0} \boxed{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}} + f(x) \boxed{\frac{g(x+h) - g(x)}{h}} \Bigg)$$

$h \to 0$ $\qquad \underbrace{}_{\substack{\downarrow h\to 0 \\ g(x) \\ \text{cont.}}} \qquad \underbrace{}_{\substack{\downarrow \\ f'(x)}} \qquad \underbrace{}_{\substack{\downarrow \\ g'(x)}}$

$$= g(x)\, Df(x) + f(x)\, Dg(x).$$