Lezione 27

lunedì 9 dicembre 2013
14:18

Esercizio 1 Studiare la funzione

$$\boxed{f(x) = x \cdot \left| 6 + \frac{1}{\log(4x)} \right|}$$

Dominio.

- $4x > 0 \iff x > 0$
- $\log(4x) \neq 0 \iff 4x \neq 1 \iff x \neq 1/4$

Conclusione:

$$D(f) = (0, 1/4) \cup (1/4, \infty).$$

Segno $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in D(f)$

$$f(x) = 0 \iff \left| 6 + \frac{1}{\log 4x} \right| = 0 \iff 6 + \frac{1}{\log 4x} = 0$$

$$\iff \frac{1}{\log 4x} = -6 \iff \log 4x = -\frac{1}{6}$$

$$\iff 4x = e^{-1/6} \iff x = \frac{1}{4} e^{-1/6} < \frac{1}{4}$$

Limiti agli estremi

- $$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x \left| 6 + \frac{1}{\log(4x)} \right| =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} 6x + \frac{x}{\log 4x} = 0 + 0 = 0$$

- $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} x \left(6 + \frac{1}{\log 4x} \right) = \lim_{x \to \infty} \left(6x + \frac{x}{\log 4x} \right)$$

$$= +\infty$$

- $$\lim_{x \to 1/4} f(x) = \lim_{x \to 1/4} x \left| 6 + \frac{1}{\log 4x} \right| = +\infty$$

Asintoti

- La retta di eq. $x = 1/4$ è un asintoto verticale destro e sinistro
- Cerco eventuale asintoto obliquo a $+\infty$.

Cerco m:

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left| 6 + \frac{1}{\log 4x} \right| = 6$$

Cerco q:

$$q = \lim_{x \to +\infty} f(x) - mx = \lim_{x \to +\infty} x \left| 6 + \frac{1}{\log 4x} \right| - 6x$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\log 4x} = +\infty$$

Non c'è asintoto obliquo.

Continuità e prolungamenti

- f è cont. nel suo dominio in quanto prodotto e composizione di funzi elementari cont.
- f non è definita in $x = 0$. Tuttavia

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0.$$

p.to di Acc. di $D(f)$

Possiamo prolungare la funzione f nel punto $x = 0$ definendo

$$f(0) := 0 = \lim_{x \to 0^+} f(x)$$

$$f(0) := 0 = \lim_{x \to 0^+} f(x)$$

La funzione risultante (il prolungamento di f in $x=0$) è cont. in $x=0$.

Derivabilità di f Siccome $|x|$ non è der. per $x=0$

Allora $f(x)$ potrebbe non essere derivabile per

$$6+\frac{1}{\log 4x}=0 \iff x=\frac{1}{4}\cdot e^{-1/6}$$

Per $x \in D(f)$ con $x \neq \frac{1}{4} e^{-1/6}$, f è derivabile (in x).

Derivata

$$Df(x) = f'(x) = D\left(x\left|6+\frac{1}{\log 4x}\right|\right) =$$

$$= 1\cdot\left|6+\frac{1}{\log 4x}\right| + x\, D\left|6+\frac{1}{\log 4x}\right|$$

$$= \left|6+\frac{1}{\log 4x}\right| + x\,\frac{\left|6+\frac{1}{\log 4x}\right|}{6+\frac{1}{\log 4x}}\cdot \underbrace{D(\log 4x)^{-1}}_{= (-1)\cdot(\log 4x)^{-2}\,\frac{4}{4x}}$$

$$= \left|6+\frac{1}{\log 4x}\right|\left(1+\frac{1}{6+\frac{1}{\log 4x}}\cdot(-1)\,\frac{1}{(\log 4x)^2}\right)$$

$$= \left|6+\frac{1}{\log 4x}\right|\left(1-\frac{1}{(6\log 4x+1)\log 4x}\right)$$

Limiti della derivata

Limiti della derivata

a destra $\quad$ a sinistra

- $$\lim_{x \to \frac{1}{4}e^{-1/6}\pm} f'(x) =$$

$$= \lim_{x \to 1/4\, e^{-1/6}\pm} \underbrace{\left|6+\frac{1}{\log 4x}\right|}_{\to 0} - \boxed{\frac{\left|6+\frac{1}{\log 4x}\right|}{6+\frac{1}{\log 4x}}} \cdot \boxed{\frac{1}{(\log 4x)^2}}$$

$0 > \ \ 0 <$ $\quad$ $\to 36$

$$36 = \frac{1}{1/36} = \frac{1}{(\log e^{-1/6})^2}$$

$$\lim_{x \to 1/4\, e^{-1/6}+} f'(x) = +36$$

$$6+\frac{1}{\log 4x} > 0 \iff \frac{1}{\log 4x} > -6$$

$$\iff \log 4x < -\frac{1}{6}$$

$$\lim_{x \to \ldots -} f'(x) = -36$$

$$\iff x < \frac{1}{4}e^{-1/6}$$

Segno della derivata

Studio gli intervalli di monotonia:

$$f'(x) > 0 \iff 1 - \frac{1}{\log 4x \,(6 \log 4x + 1)} > 0$$

$$\frac{\log 4x\,(6\log 4x + 1) - 1}{\log 4x \cdot (6\log 4x + 1)} > 0$$

$t = \log 4x$ e studiamo

$$g(t) = \frac{6t^2 + t - 1}{t(6t+1)} > 0$$

Soluzioni di $6t^2 + t - 1 = 0 \longrightarrow t_\pm = \begin{cases} 1/3 \\ -1/2 \end{cases}$

Dunque

$$6t^2 + t - 1 > 0 \iff t < -1/2 \text{ oppure } t > 1/3$$

Poi

$$t(6t+1) > 0 \iff t < -1/6 \text{ oppure } t > 0$$

TABELLA

	$-1/2$		$-1/6$		0		$1/3$	
$6t^2+t-1$	$+++$		$---$		$---$		$---$	$+++$
$t(6t+1)$	$+++$		$+++$		$---$		$+++$	$+++$
$g(t)$	$+++$		$---$		$+++$		$---$	$+++$
Passo alla x		$\frac{1}{4}e^{-1/2}$		$\frac{1}{4}e^{-1/6}$		$1/4$		$\frac{1}{4}e^{1/3}$
$f'(x)$	$+++$		$---$		$+++$		$---$	$+++$
$f(x)$	$\uparrow$		$\downarrow$		$\uparrow$		$\downarrow$	$\uparrow$

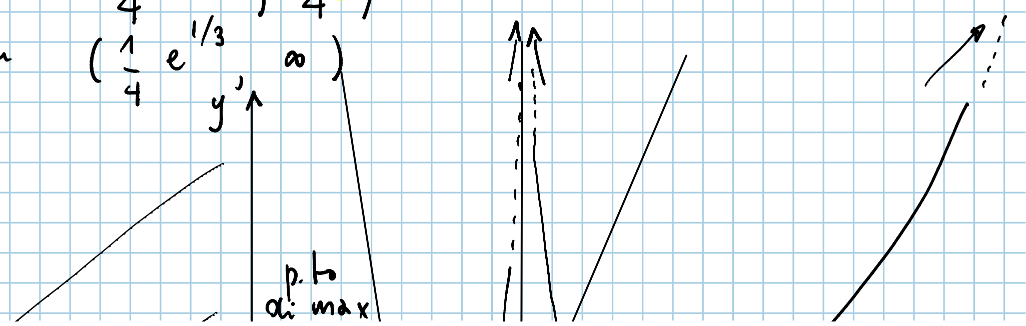
Monotonia

f crescente in $\left(0, \frac{1}{4}e^{-1/2}\right)$

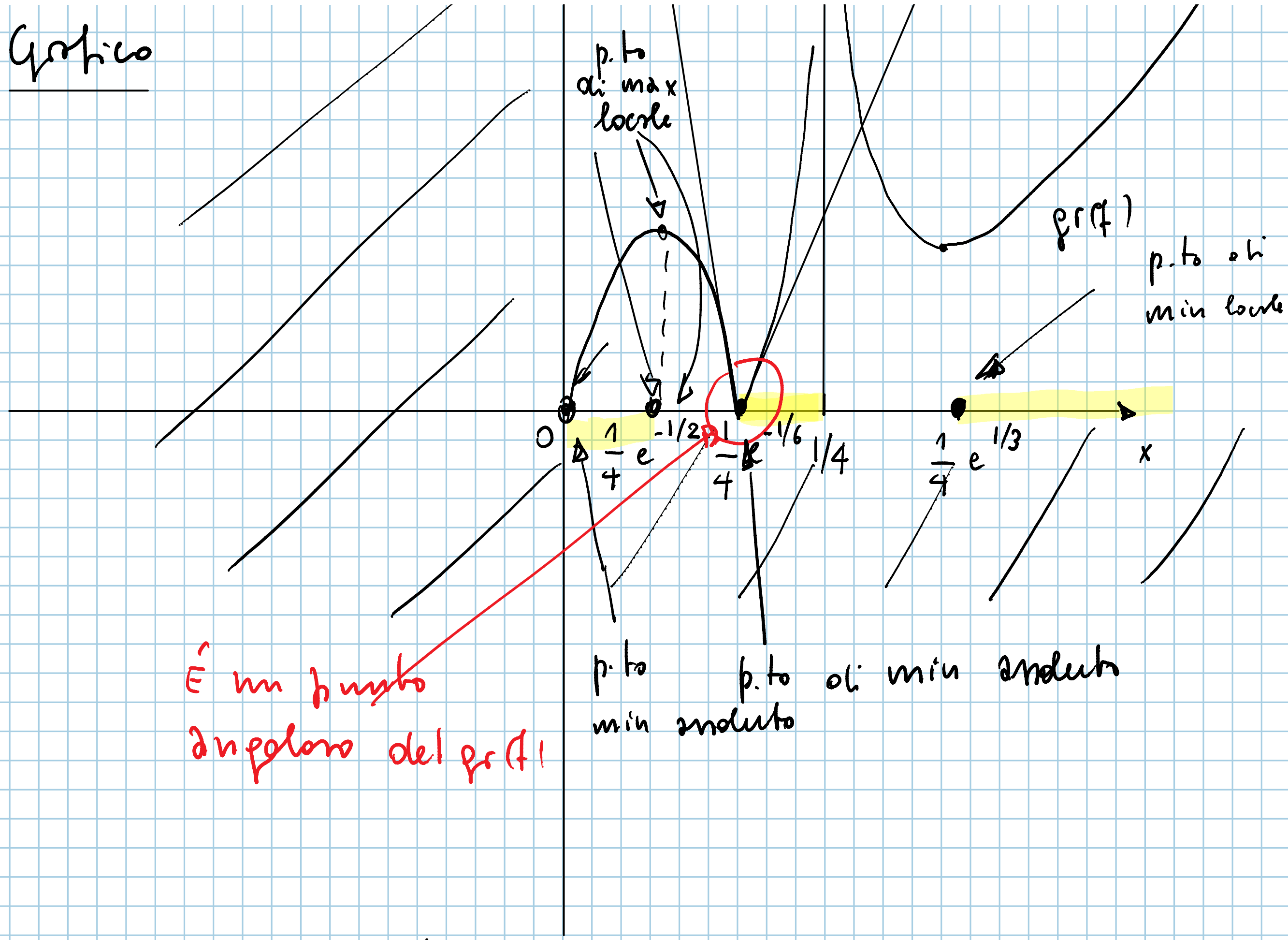
f " " $\left(\frac{1}{4}e^{-1/6}, \frac{1}{4}\right)$

f " in $\left(\frac{1}{4}e^{1/3}, \infty\right)$

Grafico



Grafico



DEF Sia $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ continua e derivabile in $(a,b)\setminus\{x_0\}$ con $x_0 \in (a,b)$.

Diciamo che x_0 è un punto di angolo per il grafico di f se esistono finiti e diversi i due limiti

$$\lim_{x \to x_0^+} f'(x) \neq \lim_{x \to x_0^-} f'(x).$$

Esercizio Studiare la funzione

$$f(x) = \log(\cosh x) - \log|\sinh(x) - 1|$$

Dominio • $\cosh x \geq 1 \Rightarrow \log(\cosh x)$ è def. $\forall x$

• Devo richiedere $|\sinh x - 1| \neq 0$

$$\sinh x - 1 \neq 0$$

$$\sinh x \neq 1$$

Eq. $\dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2} \neq 1 \qquad e^{x} - e^{-x} \neq 2$

Poniamo $t = e^{x}$, $e^{-x} = \dfrac{1}{t}$ e troviamo

$$t - \frac{1}{t} - 2 \neq 0, \qquad t^2 - 2t - 1 \neq 0$$

$$t \neq 1 \pm \sqrt{2}$$

$$t = e^{x} > 0$$

Devo escludere $e^{x} \neq 1 + \sqrt{2}$

$$x \neq \log(1+\sqrt{2}) = x_0$$

Conclusione

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{ \log(1+\sqrt{2}) \}$$

Segno

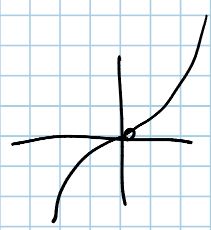
$$f(x) = \log\left(\frac{\cosh x}{|\sinh x - 1|} \right)$$

$$f(x) > 0 \iff \frac{\cosh x}{|\sinh x - 1|} > 1$$

$$\iff \cosh x > |\sinh x - 1|$$

$$\iff \cosh^2 x > \sinh^2 x - 2 \sinh x + 1$$

$$\iff \underbrace{\cosh^2 x - \sinh^2 x}_{=1} > -2 \sinh x + 1$$



$$\iff 0 > -2 \sinh x \iff \sinh x > 0$$

$$\iff x > 0$$

$f(x) = 0 \iff x = 0$