Lezione 3

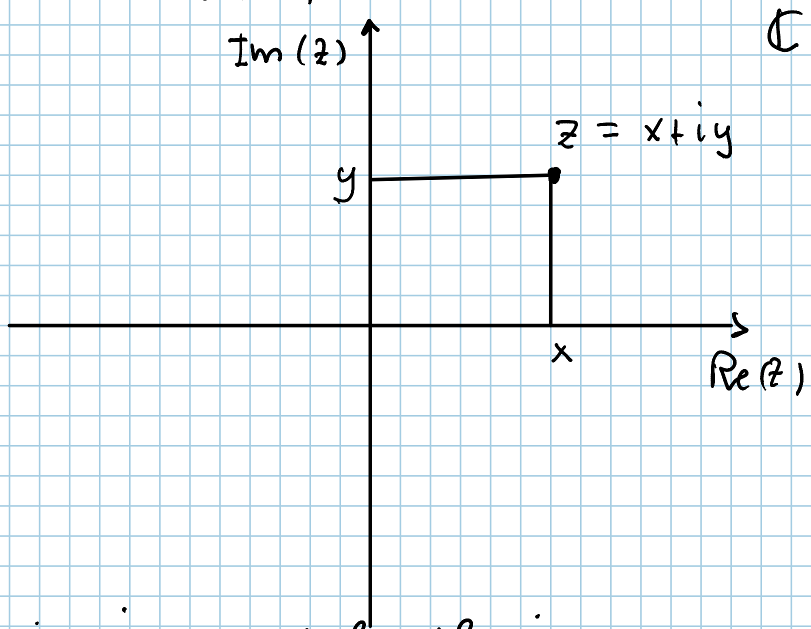
giovedì 10 ottobre 2013
14:14

Def La parte reale e la parte immaginaria di un numero complesso $z = x + iy \in \mathbb{C}$, dove $x, y \in \mathbb{R}$, sono definite nel seguente modo:

$$\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(x+iy) = x$$

$$\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(x+iy) = y$$

Osservo che $\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z) \in \mathbb{R}$.

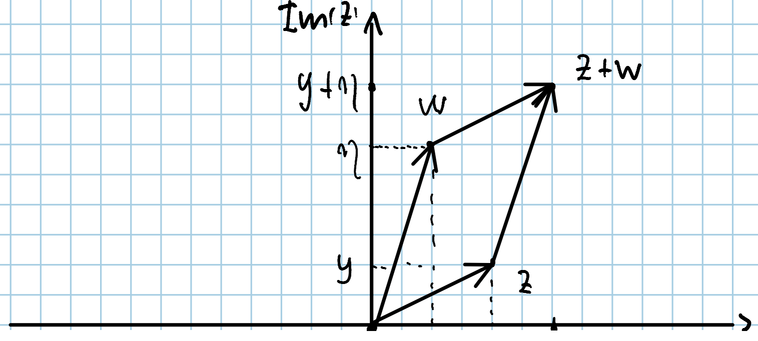


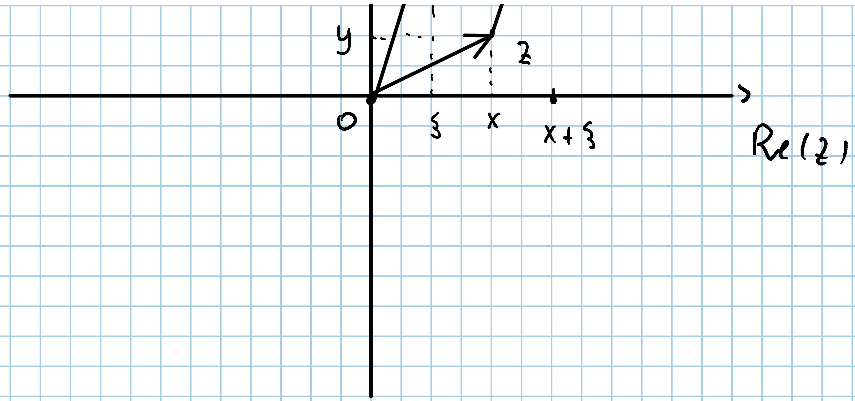
Operazioni sui numeri complessi

1. Somma. Dati $z = x+iy$ e $w = \xi + i\eta$ numeri complessi definiamo la loro somma:

$$z + w = x + iy + \xi + i\eta = x + \xi + i(y+\eta).$$

È la "somma vettoriale" di z e w come punti del piano





2. Prodotto. Definiamo il prodotto di $z = x+iy \in \mathbb{C}$ per $w = \xi + i\eta \in \mathbb{C}$ nel seguente modo: $i^2 = -1$

$$z \cdot w = (x+iy)\cdot(\xi + i\eta) = x\xi + ix\eta + iy\xi - y\eta$$

$$= x\xi - y\eta + i(x\eta + y\xi).$$

3. Reciproco di un numero complesso e quoziente di due numeri complessi. Sia $z = x+iy \in \mathbb{C}$ tale che $z \neq 0$ ovvero $x^2+y^2 \neq 0$. Allora:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{1}{x+iy}\cdot\frac{x-iy}{x-iy} =$$

$$= \frac{x-iy}{x^2 - \cancel{ixy} + \cancel{ixy} - i^2 y^2} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{x}{x^2+y^2} + i\,\frac{-y}{x^2+y^2}.$$

Questo è il Reciproco di z. Conto:

$$(x+iy)\cdot\left(\frac{x}{x^2+y^2} + i\,\frac{-y}{x^2+y^2}\right) = 1$$

Quoziente. Procedo in questo modo:

Quoziente. Procedo in questo modo:

$$\frac{w}{z} = w \cdot \left(\frac{1}{z}\right)$$

dove $w, z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$

definito sopra

La sappiamo fare

<u>Osservazioni</u> L'insieme $\mathbb{C}$ con le operazioni $+$ (somma) e $\cdot$ (prodotto) definite sopra verifica (S1) - (S4), (P1) - (P4), (Propr. Distr.).

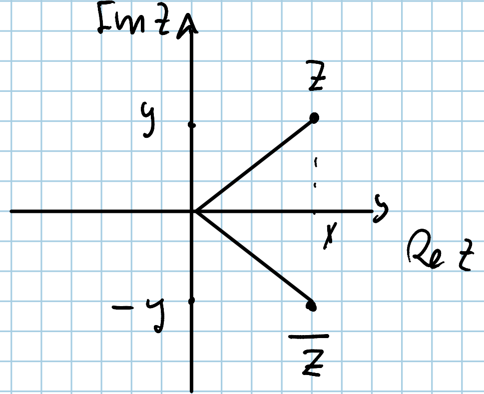
Attenzione In $\mathbb{C}$ <u>non</u> c'è alcuna relazione di $\leq$ (di ordine). Quindi affermazioni del tipo

$z \leq w$ $\boxed{\text{NON}}$ hanno senso

<u>Def</u> Il coniugato del numero complesso $z = x + iy \in \mathbb{C}$ è il numero complesso:

$$\bar{z} = x - iy$$

"zeta coniugato"



<u>Proprietà</u>

1) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$;

2) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$;

3) $\overline{\overline{z}} = z$;

4) $\overline{\left(\frac{w}{z}\right)} = \frac{\overline{w}}{\overline{z}}$.

Osservazione Si hanno queste altre formule

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2} \in \mathbb{R},$$

$$\mathrm{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i} \in \mathbb{R}.$$

Modulo di un numero complesso

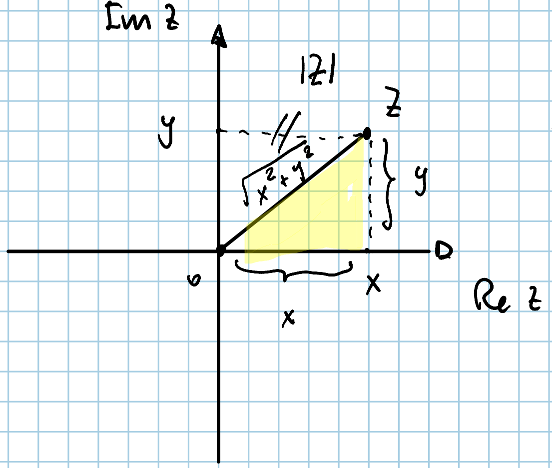
Il modulo di $z = x + iy$ è

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Osservo che se $z = x + i \cdot 0 = x \in \mathbb{R}$ allora:

$$|z| = \sqrt{x^2 + 0^2} = \sqrt{x^2} = |x|.$$

Disegno:

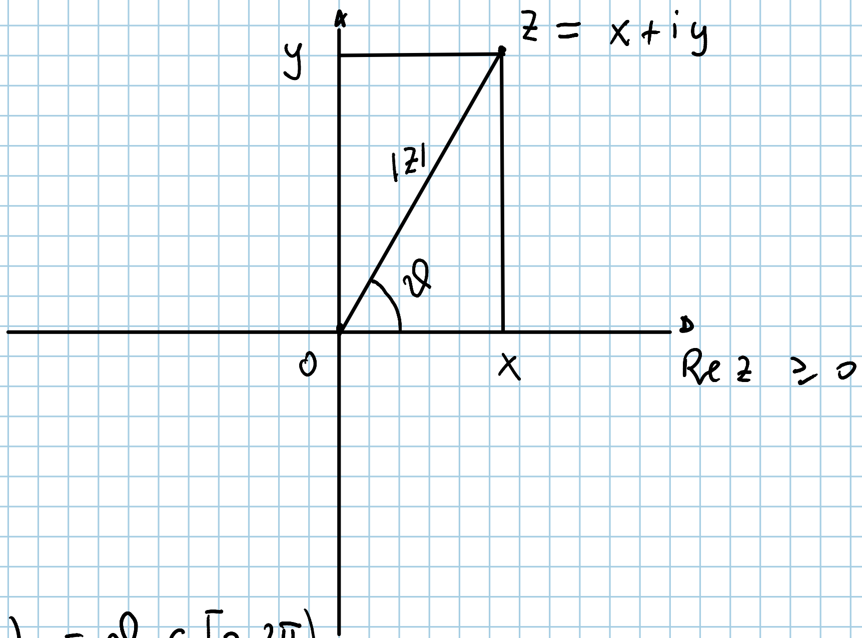


$|z|$ = dist. di z da 0.

Osservazione: $|z| \geq 0$

Argomento di un numero complesso

Sia $\vartheta \in [0, 2\pi)$ l'angolo formato dal punto $z \in \mathbb{C}$ con il semiasse positivo delle x. in senso antiorario



Definiamo

$$\arg(z) = \vartheta \in [0, 2\pi)$$

Avremo

$$\begin{cases} x = |z| \cdot \cos\vartheta \\ y = |z| \cdot \sin\vartheta \end{cases}$$

Dunque:

$$\frac{y}{x} = \frac{|z| \sin\vartheta}{|z| \cos\vartheta} = \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta} = tg\,\vartheta$$

Se il punto z è nel 1° quadrante

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = \operatorname{arctg}\left(tg\,\vartheta\right) = \vartheta$$

Corretto

solo se $z \in$ 1° quadrante

Ho trovato la formula:

$$\boxed{\arg(z) = \vartheta = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right).}$$

Esercizio Dato $z = x+iy \in \mathbb{C}$, provare che:

(1) $\arg(z) = \pi + \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$ se z è nel secondo oppure terzo quadrante

(2) $\arg(z) = 2\pi + \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$ se z è nel quarto quadrante.