Lezione 31

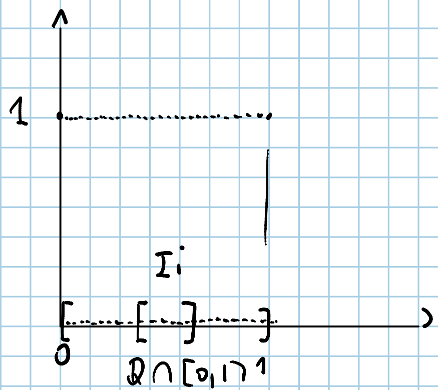
lunedì 16 dicembre 2013
14:13

Esempio (di funzione NON integrabile)

$A = [0,1]$ e sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \\ 1 & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \end{cases}$$

f è limitata.



Sia $D \in \mathcal{D}([0,1])$ una suddivisione

$$D = \{ 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1 \}$$

Nell'intervallo $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ ci sono sia punti razionali (in $\mathbb{Q}$) che punti reali non razionali in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Quindi

$$M_i = \sup_{x \in I_i} f(x) = 1 \qquad \forall i = 1 \dots n$$

$$m_i = \inf_{x \in I_i} f(x) = 0 \qquad \forall D$$

Dunque

$$s(f, D) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{m_i}_{=0} \cdot (x_i - x_{i-1}) = 0 \qquad \forall D$$

$$S(f, D) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{M_i}_{=1} \cdot (x_i - x_{i-1}) = 1 \qquad \forall D$$

e quindi

$$\sup_{D \in \mathcal{D}([0,1])} s(f, D) = 0 < 1 = \inf_{D \in \mathcal{D}([0,1])} S(f, D)$$

Quindi f (detta funzione di Dirichlet) NON è integrabile.

Proprietà generali dell'integrale

(1) Siano $f, g \in \mathcal{R}(A)$, $A = [a,b]$, siano poi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Allora $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}(A)$ ed inoltre

$$\int_a^b \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx .$$

Linearità dell'integrale.

(2) Monotonia dell'integrale. Siano $f, g \in \mathcal{R}(A)$ due funzioni tali che $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in A$. Allora

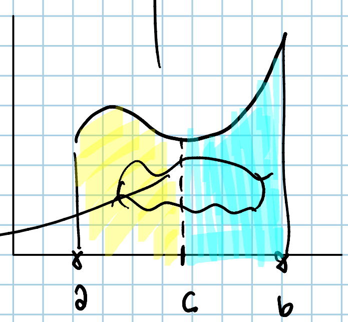
$$\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx$$

(3) Scomposizione del dominio. Se $f \in \mathcal{R}(A)$ con

$$A = [a,b] = [a,c] \cup [c,b] \qquad (\text{con } a \leq c \leq b)$$

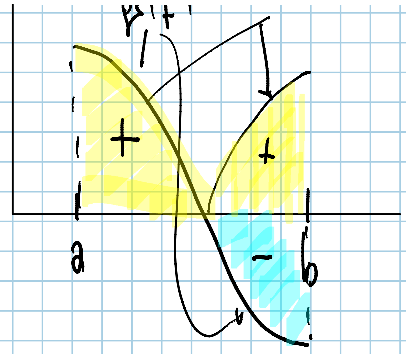
allora

$$\underbrace{\int_a^b f(x)\, dx}_{\Delta} = \underbrace{\int_a^c f(x)\, dx}_{\Delta} + \underbrace{\int_c^b f(x)\, dx}_{\Delta}$$



(4) Se $f \in \mathcal{R}(A)$ allora $|f| \in \mathcal{R}(A)$ e inoltre

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx .$$



Convenzione Se $a < b$ allora poniamo

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

TEOREMI DI INTEGRABILITA'

TEOR 1 Siano $A = [a,b]$ un intervallo chiuso e limitato e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f è Riemann-integrabile su A.

Dim. è omessa. Si tratterebbe di provare che

$$\sup_{D \in \mathcal{D}(A)} s(f, D) = \inf_{D \in \mathcal{D}(A)} S(f, D).$$

TEOR. 2 Sia $A = [a,b]$ chiuso e limit. e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione monotòna. Allora f è R.-integrabile su A.

TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

DEF 1 (Funzione integrale). Sia $f : A = [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile su A. Allora la funzione una funzione integrabile su A. Allora la funzione $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ definita per ogni $x \in [a,b]$ nel seguente modo:

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt \qquad x \in [a,b]$$

si chiama <u>Funzione Integrale</u> di f.

<u>DEF 2 (Primitiva)</u> Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Diciamo che una funzione $G \in C^1([a,b])$ è una primitiva di f se $G'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b]$.

<u>Oss</u> se G è primitiva di f, allora $G + k$, con $k \in \mathbb{R}$ costante, è primitiva di f.

<u>Lemma 1 (della Media integrale)</u> Siano $A = [a,b]$ int. chiuso e limitato ed $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ funzione continua. Allora esiste $\xi \in [a,b]$ tale che

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)$$

Dim. Siccome f è continua

$$\min_{x \in A} f(x) \leq f(x) \leq \max_{x \in A} f(x)$$

Dunque

$$\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \underset{\overset{\vee}{\max\limits_A f}}{f(x)}\,dx \leq \frac{1}{b-a}\cdot \max_A f \cdot (b-a)$$

Dunque

$$\frac{1}{b-a}\min_A f \cdot (\cancel{b-a}) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \underset{\substack{\vee\!/ \\ \min_A f}}{f(x)}\, dx \leq \underbrace{\frac{1}{b-a}\cdot \max_A f \cdot (b-a)}_{\max_A f}$$

Per il Teor. dei valori intermedi esiste $\xi \in [a,b]$ tale che

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx.$$

$\square$

<u>Lemma 2</u> Siano $F, G \in C^1([a,b])$ tali che $F'(x) = G'(x)$ $\forall x \in [a,b]$. Allora $F(x) - G(x)$ è costante su $[a,b]$.

Dim. $H(x) = F(x) - G(x)$, $H'(x) = F'(x) - G'(x) \overset{\text{Ipotesi}}{=} 0$.

Allora, dati $x_1, x_2 \in [a,b]$ $\exists\ \xi \in [x_1, x_2]$ tale che

$$H(x_1) - H(x_2) = \underset{\substack{\| \\ 0}}{H'(\xi)} \cdot (x_1 - x_2) = 0$$

Dunque H è costante.

$\square$

<u>TEOREMA (Fondamentale del Calcolo Integrale)</u>

Sia $A = [a,b]$ un intervallo chiuso e limitato, sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e infine sia $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ la funzione integrale di f. Allora:

(1) F è derivabile in $[a,b]$ e inoltre $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in [a,b]$ (ovvero: F è una primitiva di f).

(2) Se poi $G \in C^1([a,b])$ è una primitiva di f allora $G(x) - F(x) = G(a) - F(a)$ $\forall x \in [a,b]$ (è costante). In particolare si deduce che

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a).$$

Dim.

(1) Provo che F è derivabile in $x_0 \in [a,b]$:

$$\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = \frac{1}{h}\left\{ \int_a^{x_0+h} f(x)\,dx - \int_a^{x_0} f(x)\,dx \right\} \overset{\text{scomp. del dominio}}{=} \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,dx = f(\xi)$$

Esiste $\xi \in [x_0, x_0+h]$ tale che

Chiaramente $\xi = \xi(h)$ e inoltre

$$h \to 0 \implies \xi(h) \to x_0$$

Dunque per $h \to 0$ trovo

$$F'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} f(\xi(h)) \overset{f \text{ è continua}}{=} f(x_0).$$

Dunque F è primitiva di f. ∎

(2) Sia ora $G \in C^1([a,b])$ una primitiva di f. Allora

$$G'(x) - F'(x) = \underset{\text{ipotesi}}{f(x)} - \overset{\text{punto 1)}}{f(x)} = 0 \quad \forall x$$

Siccome $G' - F' = 0$ su $[a,b]$ allora per il Lemma 2

$G - F$ è costante. Ad esempio

$$G(x) - F(x) = G(a) - \underbrace{\overset{\overset{0}{\shortparallel}}{F(a)}}_{\overset{\shortparallel}{\int_a^a f(x)\,dy} = 0} \quad \forall x \in [a,b]$$

Per $x = b$ trovo:

$$G(b) - F(b) = G(a)$$

Riordino e trovo

$$\int_a^b f(x)\,dx \underset{DEF}{=} F(b) = G(b) - G(a). \qquad \square$$

<u>Applicazione del Teorema</u>

Data f, cerco G primitiva di f (ovvero $G' = f$) e così per il TFCI

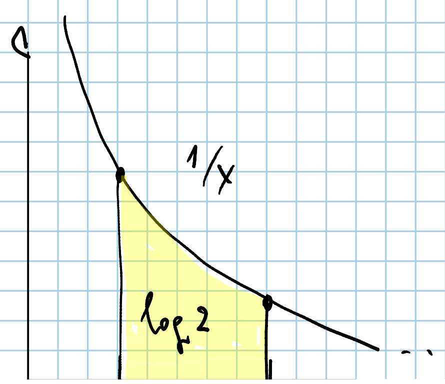
$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[\, G(x) \,\Big]_{x=a}^{x=b} = G(b) - G(a).$$

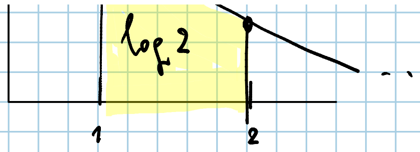
Ad esempio:

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \Big[\, \log|x| \,\Big]_{x=1}^{x=2} = \log|2| - \log|1| = \log 2.$$

cerco G tale che $G'(x) = 1/x$

$G(x) = \log|x|$ va bene è primitiva





Oppure

$$\int_1^2 \frac{\log x}{x}\, dx = \left[\frac{1}{2} (\log|x|)^2 \right]_{x=1}^{x=2} = \frac{1}{2} (\log 2)^2 .$$

$$G(x) = \frac{1}{2} (\log|x|)^2 \quad \text{è primitiva}$$

Attenzione. Il seguente conto è sbagliato:

$$\cancel{\int_{-1}^{2} \frac{1}{x}\, dx} = \Big[\lg|x| \Big]_{x=-1}^{x=2} = \lg 2 \cancel{- \log|-1|}$$
$$= \log 2$$

NON è corretto perché il TFDCI si applica a funzioni (integrabili) continue su un intervallo, e $1/x$ non lo è su $[-1, 2] \ni 0$!

DEF (Integrale indefinito) Con "integrale indefinito" di f si intende una generica primitiva di f e si indica con

$$\int f(x)\, dx$$

senza indicare gli estremi di integrazione.

Tabella delle primitive elementari

Funzione	Primitiva	Note
x^α	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\alpha \neq -1$

x	$\overline{\alpha+1}$	$\alpha \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\log\lvert x\rvert$	$x>0$ o $x<0$
$e^{\alpha x}$	$\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}$	$\alpha \neq 0$
$\cosh x$	$\sinh x$	
$\sinh x$	$\cosh x$	
$\cos x$	$\sin x$	
$\sin x$	$-\cos x$	
$\operatorname{tg} x$	$-\log\lvert\cos x\rvert$	$-\pi/2 < x < \pi/2$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$-1 < x < 1$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x$	

Integrali di funzioni razionali

Vogliamo integrare funzioni del tipo

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

dove P e Q sono polinomi, con integrali su intervalli chiusi dove $Q \neq 0$.

Esempi elementari

ES. 1 $\quad Q(x) = x + k \qquad k \in \mathbb{R}$

- $\displaystyle\int \frac{1}{x+k}\,dx = \log\lvert x+k\rvert + C$

- $$\int \frac{x}{x+k}\,dx = \int \frac{x+k-k}{x+k}\,dx = \int \left(1 - \frac{k}{x+k}\right)dx$$

$$= x - k \cdot \int \frac{dx}{x+k} = x - k \cdot \log|x+k| + c$$

- $$\int \frac{x^2}{x+k}\,dx = \int \frac{\overbrace{x^2+kx}^{x(x+k)} - kx}{x+k}\,dx$$

$$= \int \left(x - \frac{kx}{x+k}\right)dx = \frac{x^2}{2} - k\int \frac{x}{x+k}\,dx$$

ES. 2 $\quad Q(x) = x^2+1 .$