Lezione 32

mercoledì 18 dicembre 2013
14:16

ES. $Q(x) = x^2 + 1$

- $\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \operatorname{arctg}(x) + c$
- $\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\log(1+x^2) + c$
- $\int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) dx = x - \operatorname{arctg}(x) + c$
- $\int \frac{\overbrace{x^3}^{+x-x}}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x(x^2+1) - x}{x^2+1}\,dx = \int \left(x - \frac{x}{x^2+1}\right) dx$

$$= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + c$$

ES 3

$$\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx = \log|ax^2+bx+c| + c$$

ES 4 $P(x) = 1$ e $Q(x) = ax^2+bx+c$. Voglio calcolare

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = ? \qquad a \neq 0$$

Δ = discriminante del polinomio $= b^2 - 4ac$

1° caso: $\Delta < 0$. Posso scrivere

$$Q(x) = \alpha\left((\beta x + \gamma)^2 + 1\right) \qquad \alpha \neq 0,\ \beta \neq 0$$

Devo calcolare prima

Devo calcolare quindi

$$\int \frac{1}{\alpha\left((\beta x+\gamma)^2+1\right)}\,dx = \frac{1}{\alpha\beta}\,\operatorname{arctg}(\beta x+\gamma)+c$$

2° Caso : $\Delta = 0$. Posso riscrivere

$$q(x) = a(x-x_0)^2 \qquad \text{con } x_0 \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}^{\#0}$$

Devo calcolare

$$\int \frac{1}{a(x-x_0)^2}\,dx = \frac{1}{a}\int (x-x_0)^{-2}\,dx$$

$$= \frac{1}{a}\cdot(-1)\cdot(x-x_0)^{-1}+c$$

$$= -\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{x-x_0}+c \,.$$

3° Caso : $\Delta > 0$. Ci sono 2 radici reali e distinte:

$$q(x) = a\cdot(x-x_0)(x-x_1) \qquad a\neq 0 \quad x_0,x_1 \in \mathbb{R}$$

$$x_0 \neq x_1$$

Devo calcolare

$$\int \frac{1\cdot dx}{a(x-x_0)(x-x_1)} = \frac{1}{a}\int\left(\frac{A}{x-x_0}+\frac{B}{x-x_1}\right)dx$$

$$= \frac{1}{a(x_0-x_1)}\log\left|\frac{x-x_0}{x-x_1}\right| \,.$$

Esempio Calcolare il seguente integrale:

$$I = \int_{\dots}^{1/2} \frac{1}{1-x^2}\,dx$$

$$I = \int_{-1/2} \frac{}{1-x^2}\, dx$$

Procedo con il metodo dei fratti semplici:

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} =$$

dove $A, B \in \mathbb{R}$ da determinare

$$= \frac{A + Ax + B - Bx}{(1-x)(1+x)}$$

$$= \frac{(A-B)x + A + B}{(1-x)(1+x)}$$

Trovo il sistema

$$\begin{cases} A - B = 0 \\ A + B = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = B \\ 2A = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 1/2 \\ B = 1/2 \end{cases}$$

Dunque

$$I = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{(1-x)(1+x)}\, dx = \int_{-1/2}^{1/2} \left(\frac{1/2}{1-x} + \frac{1/2}{1+x} \right) dx =$$

$$= \left[-\frac{1}{2} \log|1-x| + \frac{1}{2} \log|1+x| \right]_{x=-1/2}^{x=1/2}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\log \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right]_{x=-1/2}^{x=1/2} = \ldots = \frac{\log 3}{2} = I \qquad \square$$

Esempio Calcolare

$$I = \int_{-1/2}^{1} \frac{1}{x^2 + x + 1} \, dx$$

Conti:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3 \quad \text{negativo}$$

Dunque

$$x^2 + x + 1 = x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1$$

$$= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

$$= \frac{3}{4} \left[\frac{4}{3} \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 1 \right]$$

$$= \frac{3}{4} \left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}} x + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 + 1 \right]$$

Dunque

$$I = \int_{-1/2}^{1} \frac{1}{\frac{3}{4} \left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}} x + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 + 1 \right]} \, dx =$$

$$= \frac{4}{3} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} x + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right]_{x=-1/2}^{x=1}$$

$$= \ldots = \frac{2\sqrt{3}}{9} \pi. \qquad \square$$

Metodo dei fratti semplici

Dati due polinomi $P(x)$ e $Q(x)$ vogliamo calcolare

$$\int \frac{P(x)}{\ldots} \, dx$$

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx \,.$$

1° Passo Se il grado di $P(x)$ è $\geq$ al grado di $Q(x)$ eseguo una divisione di polinomi per ottenere

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \boxed{\frac{R(x)}{Q(x)}} + S(x)$$

dove $S(x)$ ed $R(x)$ sono polinomi ed in particolare

S = è il quoziente

R = è il resto della divisione e quindi il grado di R è $<$ del grado di Q

2° Passo Posso supporre che il grado di P sia $<$ del grado di Q.

Fattorizzo Q in un prodotto di fattori semplici irriducibili e procedo come nel seguente esempio:

$P(x) = 1$

$Q(x) = x^4 - x^3$

Fattorizzo Q:

$$Q(x) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1° fattore} \\ \text{semplice}}}{x^3} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{2° fattore} \\ \text{semplici}}}{(x-1)}$$

Scrivo P/Q in questo modo

generico polinomio di grado $2 = 3-1$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Ax^2+Bx+C}{x^3} + \frac{D}{x-1} =$$

$Q(x)$ $\qquad x^3 \qquad x-1$

dove $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ sono 4 costanti da determinare

$$= \frac{Ax^3 + Bx^2 + Cx - Ax^2 - Bx - C + Dx^3}{x^3(x-1)}$$

$$= \frac{(A+D)x^3 + (B-A)x^2 + (C-B)x - C}{x^3(x-1)}$$

Sistema :

$$\begin{cases} A + D = 0 \\ B - A = 0 \\ C - B = 0 \\ -C = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} D = +1 \\ A = -1 \\ B = -1 \\ C = -1 \end{cases}$$

Dunque

$$\frac{1}{x^3(x-1)} = \frac{-x^2 - x - 1}{x^3} + \frac{+1}{x-1}$$

ES Calcolare $I = \int_2^3 \frac{dx}{x^4 - x^3}$

$$I = \int_2^3 \left(\frac{-(x^2 + x + 1)}{x^3} + \frac{1}{x-1} \right) dx$$

$$= \int_2^3 \left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x-1} \right) dx$$

$$= \int_2^3 \left(\frac{1}{x-1} - x^{-1} - x^{-2} - x^{-3} \right) dx$$

$x = 3$

-2

$$= \left[\log|x-1| - \log|x| + x^{-1} + \frac{1}{2} x^{-2} \right]_{x=2}^{x=3}$$

$$= \frac{17}{72} + \log(3/4) .$$

<u>Integrazione per parti e per sostituzione</u>

<u>TEOREMA 1</u> Siano $f, g \in C^1([a,b])$, allora si ha la seguente formula di integrazione per parti:

$$\int_a^b f'(x) \cdot g(x) \, dx = \left[f(x) \cdot g(x) \right]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f(x) \cdot g'(x) \, dx.$$

Dim. Per la formula della derivata del prodotto:

$$\left(f(x) \cdot g(x) \right)' = f'(x)\, g(x) + f(x) \cdot g'(x) \quad \forall x$$

Integrando

$$\int_a^b \left(f(x)\, g(x) \right)' dx = \int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx + \int_a^b f(x) \cdot g'(x)\, dx$$

TFCI

$$= \left[f(x)\, g(x) \right]_{x=a}^{x=b}$$

Ho ottenuto la tesi. $\square$

<u>Esempi</u>

- $$\int_0^1 \underset{\substack{\| \\ g(x)}}{x} \; \underset{\substack{\| \\ f'(x)}}{e^x} \, dx = \left[x\, e^x \right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 e^x \, dx =$$

$\Rightarrow f(x) = e^x$

$$\underset{\substack{\| \\ 1}}{g'(x)} \cdot \underset{\substack{\| \\ e^x}}{f(x)}$$

$$1 \quad \cdot \; e^x$$

$$= e - \left[e^x \right]_{x=0}^{x=1} = e - \left(e - 1 \right)$$

$$= +1$$

- $$\int_0^{\pi/2} \underset{\underset{g(x)}{\parallel}}{x} \cdot \underset{\underset{f'(x)}{\parallel}}{\sin x} \, dx = \left[-x \cos x \right]_{x=0}^{x=\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \underset{g'(x)}{1} \cdot \underset{f(x)}{(-\cos x)} \, dx =$$

$$\Rightarrow f(x) = -\cos x$$

$$= \underset{\underset{0}{\parallel}}{-\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2}} - \underset{\underset{0}{\parallel}}{(-0 \cdot \cos 0)} + \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx$$

$$= \left[\sin x \right]_{x=0}^{x=\pi/2} = 1 - 0 = 1$$

- $$\int_1^e \underset{\underset{f'(x)}{\parallel}}{x} \, \underset{\underset{g(x)}{\parallel}}{\log x} \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \log x \right]_{x=1}^{x=e} - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \, dx =$$

$$g'(x) = 1/x$$

$$f(x) = \frac{x^2}{2}$$

$$= \frac{e^2}{2} - \underset{\underset{0}{\parallel}}{\frac{1}{2} \log 1} - \int_1^e \frac{x}{2} \, dx$$

$$= \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4} \right]_{x=1}^{x=e} = \frac{e^2+1}{4} > 0$$

- $$\int_0^1 \underset{\underset{f'(x)}{\parallel}}{1} \cdot \underset{\underset{g(x)}{\parallel}}{\operatorname{arctg}(x)} \, dx = \left[x \operatorname{arctg}(x) \right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 x \cdot \frac{1}{1+x^2} \, dx =$$

$$f(x) = x \qquad g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$= \operatorname{arctg}(1) - \frac{1}{2} \int^1 \frac{2x}{\ldots} \, dx = \frac{\pi}{\ldots} - \frac{1}{\ldots} \left[\log(1+x^2) \right]^{x=1}$$

$$= \underset{\overset{\parallel}{\pi/4}}{\operatorname{arctg}(1)} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\Big[\lg(1+x^2)\Big]_{x=0}^{x=1}$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2 .$$

TEOREMA 2 (Integrazione per sostituzione)

Sia $\varphi : [y_0, y_1] \to [x_0, x_1]$ una funzione derivabile con derivata continua e tale che $\varphi(y_0) = x_0$ e $\varphi(y_1) = x_1$.

Sia poi $f : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua.

Allora vale la seguente formula:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \int_{y_0}^{y_1} f(\varphi(y)) \cdot \varphi'(y)\,dy .$$

Formalmente opero in questo modo:

- si pone $x = \varphi(y)$ (sostituzione)
- si trasformano gli estremi di integrazione
- si trasforma il differenziale : $dx = \varphi'(y)\,dy$

Dim. Funzione ausiliaria $H : [y_0, y_1] \to \mathbb{R}$

$$H(y) = \int_{x_0}^{\varphi(y)} f(x)\,dx = F(\varphi(y)) = F \circ \varphi\,(y)$$

dove $F : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ è la Funz. Integrale di f

cioè

$$F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt .$$

Derivata di H :

der. f. composta

$$H'(y) \underset{\text{TFCI}}{=} F'(\varphi(y)) \cdot \varphi'(y)$$

$$= f(\varphi(y)) \cdot \varphi'(y) \qquad \forall y$$

Integro:

$$= \int_{y_0}^{y_1} H'(y)\,dy = \int_{y_0}^{y_1} f(\varphi(y)) \cdot \varphi'(y)\,dy$$

TFCI

$$= H(y_1) - H(y_0)$$

$$= F(\varphi(y_1)) - F(\varphi(y_0))$$

$$= F(x_1) - F(x_0)$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx - \underbrace{\int_{x_0}^{x_0} f(x)\,dx}_{=0}$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx \qquad \square$$