Lezione 34

venerdì 20 dicembre 2013
10:20

Esercizio Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri

$$I_\alpha = \int_1^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1 + 1/x} \cdot \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx$$

(1) Calcolare tutti gli α tali che l'integrale improprio converga.

(2) Per $\alpha = -2$ calcolare l'integrale.

Sol. (1) Usare il criterio del confronto asintotico:

$$\log(1+t) = t + o(t) \qquad t \to 0$$

Quindi

$$\log\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \qquad x \to +\infty$$

$$= \frac{1}{x}\left(1 + o(1)\right) \quad \text{con } o(1) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

La funz. integranda è:

$$f(x) = \frac{x^\alpha}{1+1/x} \cdot \log\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{x^\alpha}{1+1/x} \cdot \frac{1}{x} \cdot (1+o(1))$$

$$= \frac{1}{x^{1-\alpha}} \cdot (1 + o(1)) \qquad x \to \infty$$

Dunque

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\left(\frac{1}{x}\right)^{1-\alpha}} = \lim_{x\to\infty} (1+o(1)) = 1 \neq 0$$

Dunque $f(x)$ è infinitesimo di ordine $1-\alpha$ rispetto ad $\frac{1}{x}$ quando $x \to \infty$.

Per il TCA per Int.

$$\int_1^\infty f(x)\,dx \text{ conv.} \iff \int_1^\infty \frac{1}{x^{1-\alpha}}\,dx \text{ conv.} < \infty$$

$$\iff 1-\alpha > 1 \iff \alpha < 0$$

- $\alpha < 0 \Rightarrow$ Int. conv.

- $\alpha < 0 \Rightarrow$ Int. conv.
- $\alpha \geq 0 \Rightarrow$ Int. non conv.

(2) $\alpha = -2$

$$I_{-\alpha} = \int_1^{\infty} \frac{1}{1+1/x} \cdot \frac{1}{x^2} \log\left(1+\frac{1}{x}\right) dx$$

Sost. $\frac{1}{x} = y \qquad x = \frac{1}{y} \qquad dx = -\frac{1}{y^2}\, dy$

$x = 1 \to y = 1$

$x = \infty \to y = 0$

$$I_{-\alpha} = \int_1^0 \frac{1}{1+y} \cancel{y^2} \log(1+y) \left(-\frac{1}{\cancel{y^2}}\right) dy$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+y} \cdot \log(1+y)\, dy$$

$z = \log(1+y) \iff e^z = 1+y$

$\iff y = e^z - 1$

$dy = e^z\, dz$

$y = 0 \to z = 0$

$y = 1 \to z = \log 2$

$$= \int_0^{\log 2} \frac{1}{\cancel{e^z}}\, z\, \cancel{e^z}\, dz = \left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=\log 2} = \frac{1}{2}\log^2 2.$$

$\square$

Integrali Impropri del Secondo tipo.

DEF. Sia $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua.

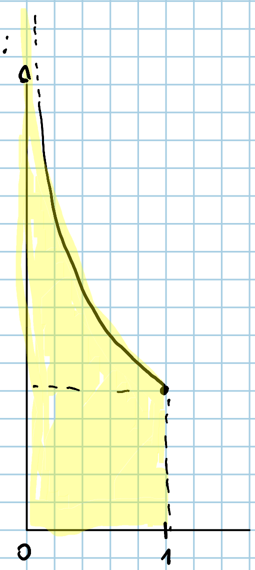
DEF. Sia $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua.
Diciamo che f è integrabile in senso improprio su $(a, b]$ se esiste finito il seguente limite

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\, dx =: \int_a^b f(x)\, dx \in \mathbb{R}$$

Diciamo in questo caso che f è integrabile su $(a, b]$.
in senso impr.

Esempio Per $\alpha > 0$ si consideri:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\, dx$$



Conti:

$\alpha \neq 1$

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 x^{-\alpha}\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha} \right]_{x=\varepsilon}^{x=1}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{1-\alpha} \left[- \varepsilon^{1-\alpha} + 1 \right]$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha} & 1-\alpha > 0 \iff \alpha < 1 \\ +\infty & 1-\alpha < 0 \iff \alpha > 1 \end{cases}$$

Se $\alpha = 1$

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\, dx \overset{\text{def.}}{=} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \Big[\log |x| \Big]_{x=\varepsilon}^{x=1}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \left(0 - \log \varepsilon \right) = +\infty$$

Conclusione:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha} < \infty \quad \text{se} \quad \alpha < 1 \quad \text{converge.} \\ \ldots \quad \text{se} \quad \alpha \geq 1 \end{cases}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \\ +\infty \quad \text{diverge se} \quad \alpha \geq 1 \end{cases}$$

DEF Sia $f: (0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione. Diciamo che f ha ordine di infinito $\alpha > 0$ rispetto $\frac{1}{x}$ per $x \to 0^+$ se esiste finito e $\neq 0$ il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{\left(\frac{1}{x}\right)^\alpha} = L \neq 0 \quad \text{finito}$$

TEOREMA (Confronto Asintotico per $x \to 0^+$).

Sia $f: (0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Supponiamo che f sia infinito di ordine $\alpha > 0$ rispetto a $1/x$ per $x \to 0^+$. Allora:

(1) Se $\alpha < 1$ allora l'integrale improprio $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge.

(2) Se $\alpha \geq 1$ allora l'int. improprio $\int_0^1 f(x)\,dx$ non converge.

Esercizio Studiare la convergenza del seguente integrale improprio

$$I = \int_0^\pi \frac{\sqrt{\sin x}\,\log\left(\frac{\pi + x}{2\pi}\right)}{(\pi - x)^2}\,dx .$$

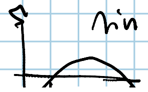
Soluzione. Sost. $\pi - x = y \iff x = \pi - y$

$dx = -dy$

$x = 0 \to y = \pi$

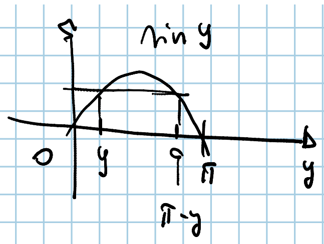
$x = \pi \to y = 0$

$$I = \int_\pi^0 \frac{\sqrt{\sin(\pi - y)}\,\log\left(\frac{\pi + \pi - y}{2\pi}\right)}{y^2}\,(-1)\,dy$$



$\sin y$

$$\int^\pi \sqrt{\sin y}\,\log\left(1 - \frac{y}{2\pi}\right)$$



$$I = \int_0^{\pi} \underbrace{\frac{\sqrt{\sin y}\ \log\left(1 - \frac{y}{2\pi}\right)}{y^2}}_{= f(y)}\, dy$$

$$\sin y = y + o(y) \qquad y \to 0$$

$$= y\,(1 + o(1)) \qquad o(1) \xrightarrow[y \to 0]{} 0$$

$$\sqrt{\sin y} = \sqrt{y} \cdot (1 + o(1)) \qquad y \to 0$$

$$\log\left(1 - \frac{y}{2\pi}\right) = -\frac{y}{2\pi} + o\left(-\frac{y}{2\pi}\right) = y\left(-\frac{1}{2\pi} + o(1)\right)$$

$$f(y) = \frac{\sqrt{y}\,(1+o(1))\; y \cdot \left(-\frac{1}{2\pi} + o(1)\right)}{y^2} \qquad y \to 0$$

$$= \frac{1}{y^{2-3/2}} \cdot \left(-\frac{1}{2\pi} + o(1)\right) \qquad y \to 0$$

$$= \frac{1}{y^{1/2}} \left(-\frac{1}{2\pi} + o(1)\right)$$

Dunque

$$\lim_{y \to 0^+} \frac{f(y)}{\frac{1}{y^{1/2}}} = \lim_{y \to 0^+} \left(-\frac{1}{2\pi} + o(1)\right) = -\frac{1}{2\pi} \neq 0$$

finito

Dunque per TCA

$$\int_0^{\pi} f(y)\, dy \text{ converge} \iff \text{converge } \int_0^{\pi} \frac{1}{y^{1/2}}\, dy$$

Sì, converge

questo integrale converge in quanto

$$1/2 < 1$$

ESERCIZI

ES 1

ES 1

(1) Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ studiare la conv. dell'integrale

$$I_\alpha = \int_0^\infty \frac{e^{2\alpha x} - 1}{e^{2x} + 1}\, dx$$

(2) Calcolare l'integrale per $\alpha = 1/2$.

Sol.

(1) Devo dire per quale α esiste finito il limite

$$\lim_{M\to\infty} \underbrace{\int_0^M \frac{e^{2\alpha x} - 1}{e^{2x} + 1}\, dx}_{= I_M}$$

Su I_M provo la sostituzione $e^x = t \iff x = \log t$

$$dx = \frac{1}{t}\, dt$$

$x = 0 \to t = 1$

$x = M \to t = e^M$

$$\boxed{I_M} = \int_1^{e^M} \frac{t^{2\alpha} - 1}{t^2 + 1} \frac{1}{t}\, dt$$

$$= \boxed{\underbrace{\int_1^{e^M} \frac{t^{2\alpha - 1}}{t^2 + 1}\, dt}_{= A} - \underbrace{\int_1^{e^M} \frac{1}{t(t^2+1)}\, dt}_{= B}}$$

Certamente B converge $\displaystyle\int_1^{e^M} \frac{1}{t^3} \frac{1}{(1 + 1/t^2)}\, dt$

infinitesimo come $\frac{1}{t^3}$ per $t \to \infty$

e $3 > 1$

Esamino A $\displaystyle\int_1^{e^M} \frac{t^{2\alpha-1}}{t^2} \frac{1}{1 + 1/t^2}\, dt =$

ok

$$\int_1 \frac{}{t^2} \quad \frac{}{1+1/t^2}$$

$$= \int_1^{e^M} \frac{1}{t^{2+1-2\alpha}} \frac{1}{1+1/t^2} \, dt \quad \to 1 \text{ ok}$$

$$= \int_1^{e^M} \frac{1}{t^{3-2\alpha}} \frac{1}{1+1/t^2} \, dt \quad \text{per il TCA}$$

Converge $\Leftrightarrow 3-2\alpha > 1 \Leftrightarrow 2 > 2\alpha \Leftrightarrow \alpha < 1$

Conclusione

Integrale converge $\Leftrightarrow \alpha < 1$.

(2) Metto $\alpha = 1/2$

$$\lim_{M\to\infty} I_M = \lim_{M\to\infty} \int_1^{e^M} \frac{1}{1+t^2}\, dt - \int_1^{e^M} \frac{1}{t(t^2+1)}\, dt$$

$$= \lim_{M\to\infty} \underbrace{\Big[\arctan(t)\Big]_{t=1}^{t=e^M}}_{\arctan(e^M) - \arctan(1)} - \lim_{M\to\infty} \boxed{\int_1^{e^M} \frac{1}{t(t^2+1)}\, dt}$$

$$\arctan(e^M) - \underbrace{\arctan(1)}_{\pi/4} \xrightarrow{M\to\infty} \arctan(\infty) - \pi/4 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$\int \frac{1}{t(t^2+1)}\, dt =$$

$$\frac{1}{t(t^2+1)} = \frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{t^2+1} = \frac{At^2 + A + Bt^2 + Ct}{t(t^2+1)} = \frac{(A+B)t^2 + Ct + A}{t(t^2+1)}$$

$\begin{cases} A = 1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} A = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} A=1 \\ C=0 \\ A+B=0 \end{cases} \quad \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=0 \end{cases}$$

$$= \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2} \frac{2t}{t^2+1} \right) dt = \log |t| - \frac{1}{2} \log(t^2+1) + \underset{\substack{\| \\ 0}}{C}$$

$$\overset{t>0}{=} \log \left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \right) \quad \text{Primitiva}$$

Fine è facile ...

<u>ES 2</u> Calcolare il seguente integrale indefinito :

$$\int \frac{\log(x-1)}{\sqrt{x+3}} \, dx$$

Sol. $x-1>0$, $x+3>0$ $\longrightarrow$ $\underline{\underline{x>1}}$

Sol. Sost. $\sqrt{x+3} = y \iff x+3 = y^2 \iff x = y^2-3$

$$dx = 2y \, dy$$

Trovo

$$\int f(x) \, dx = \int \frac{\log(y^2-4)}{\cancel{y}} 2\cancel{y} \, dy =$$

$$= 2 \int 1 \cdot \log(y^2-4) \, dy$$

$$= 2 \left\{ y \log(y^2-4) - \int y \frac{2y}{y^2-4} \, dy \right\}$$

$$= 2y \log(y^2-4) - 2 \int \frac{y^2-4+4}{y^2-4} \, dy$$

$$= 2y \log(y^2-4) - 2y - 2 \cdot 4 \int \frac{1}{y^2-4} \, dy$$

Interrompiamo. Buone Vacanze !!