Lezione 35

giovedì 9 gennaio 2014
14:11

Es. 1. Dato

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n!)}{n^2} = 0 \qquad \circledast$$

Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \left(n^2 + \log(n!) + \cos n\right) \cdot \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right) \log(n+1) - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \log(n-1)\right)$$

Poi provare $\circledast$.

Sol.

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \leq \underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{n \text{ volte}} = n^n$$

$$\underset{n}{\wedge} \ \underset{n}{\wedge}$$

$\Rightarrow$

$$\log(n!) \leq \log(n^n) = n \log n$$

Divido per n^2 e trovo

$$0 \leq \frac{\log(n!)}{n^2} \leq \frac{n \log n}{n^2} = \frac{\log n}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Fatto noto

Per confronto deduco che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n!)}{n^2} = 0.$$

Ora

$$n^2 + \log(n!) + \cos n = n^2 \left(1 + \frac{\log(n!)}{n^2} + \frac{\cos n}{n^2}\right)$$

$$= n^2 (1 + o(1)) \quad \text{per } n \to \infty$$

ho usato $\circledast$.

per dire che $\frac{\log n!}{n^2} = \underset{n\to\infty}{o(1)}$

Sviluppi

$$\sin x = x - \frac{x^3}{} + o(x^3) \qquad x \to 0$$

3!

Dunque

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{3!\,n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \qquad n \to \infty$$

Poi

$$\log(1+n) = \log\left[n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] = \log n + \lg\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

dove

$$\log(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\log(1+1/n) = 1/n - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad n \to \infty$$

Poi

$$\operatorname{arctg}(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{3}\,\frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \qquad n \to \infty$$

Infine

$$\log(n-1) = \lg\left[n\left(1-1/n\right)\right] = \lg n + \lg\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

dove

$$\log(1-1/n) = -1/n - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Ricopio:

$$(\ \dots\ ) = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{3!}\,\frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\cdot\left(\log n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$- \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{3}\,\frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\cdot\left(\log n - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) =$$

$$= \cancel{\frac{1}{n}\log n} + 1/n^2 - \frac{1}{2n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) - \frac{1}{3!}\,\frac{1}{n^3}\log n$$

$$- \frac{1}{3!}\,\frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) + \underbrace{\log n \cdot o\left(\frac{1}{n^3}\right)}_{=\,o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

$$\overbrace{}^{} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$-\left[\cancel{\frac{1}{n}\log n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] =$$

$$= 2\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n^2}\left(2 + o(1)\right)$$

Conclusione

$$\lim_{n\to\infty} \left(\dots \right)\cdot\left(\dots \right) = \lim_{n\to\infty} \cancel{n^2}\left(1+o(1)\right)\cdot\frac{1}{\cancel{n^2}}(2+o(1))$$

$$= 2.$$

<u>ES. 2</u> Calcolare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$\left(\frac{3z+1}{3z-1}\right)^3 = 1.$$

Rappresentarle ...

1^ Soluzione. Deve essere $3z-1 \neq 0 \iff z \neq 1/3$.

Poniamo $w = \dfrac{3z+1}{3z-1}$. Dobbiamo risolvere l'eq. in $w \in \mathbb{C}$

$$w^3 = 1 = Re^{i\varphi} \quad \text{con } R = 1 \text{ e } \varphi = 0$$

$$= 1 \cdot e^{i\cdot 0}$$

Cerco $w = re^{i\theta}$ con $r \geq 0$ $\vartheta \in [0, 2\pi)$.

Sappiamo che

$$w^3 = (re^{i\theta})^3 = r^3 (e^{i\theta})^3 = r^3 e^{i3\theta}$$

L'eq. diventa:

$$r^3 e^{i3\theta} = 1 \cdot e^{i \cdot 0}$$

Trovo il sistema

$$\begin{cases} r^3 = 1 \\ 3\theta = 0 + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} r = 1 \\ \theta_k = \frac{2k\pi}{3} \end{cases} \quad k = 0, 1, 2$$

Le soluzioni sono

$$w_k = e^{i\theta_k} \quad k = 0, 1, 2.$$

Per passare alle z osservo che

$$w = \frac{3z+1}{3z-1} \iff w(3z-1) = 3z+1$$
$$\iff \underline{3wz} - w = \underline{3z}+1$$
$$\iff z(3w-3) = 1+w$$
$$\iff z = \frac{1}{3}\frac{1+w}{w-1}$$

Interrompo.

2^ Soluzione $\quad z \neq 1/3$

$$\left(\frac{3z+1}{3z-1}\right)^3 = 1 \iff (3z+1)^3 = (3z-1)^3$$
$$\iff \cancel{27z^3} + 3 \cdot 9z^2 + 3 \cdot \cancel{3z} + 1 =$$
$$= \cancel{27z^3} - 27z^2 + \cancel{9z} - 1$$
$$\iff (2 \cdot 27)\, z^2 = -2$$
$$\iff z^2 = -\frac{1}{27}$$
$$\iff z = \pm\sqrt{\frac{1}{27}} \cdot \sqrt{-1}$$

$$\Longleftrightarrow \quad z = \pm \sqrt{\frac{1}{27}} \cdot \sqrt{-1}$$

$$= \pm \frac{1}{\sqrt{27}}\, i \qquad \square$$

ES. 3 Calcolare il seguente integrale

$$I = \int_{\log 5}^{\infty} \frac{\sqrt{e^x + 4}}{e^x + 5}\, dx$$

Soluz. $M > \log 5$

$$I_M = \int_{\log 5}^{M} \frac{\sqrt{e^x+4}}{e^x+5}\, dx \qquad \left(\text{poi } \lim_{M \to \infty} I_M \right)$$

Sostituzione

$$y = \sqrt{e^x + 4} \iff y^2 = e^x + 4 \implies y^2 + 1 = e^x + 5$$

$$\iff y^2 - 4 = e^x$$

$$\iff x = \log(y^2 - 4)$$

$$\implies dx = \frac{1}{y^2 - 4} \cdot 2y \cdot dy$$

$$x = \log 5 \longrightarrow y = \sqrt{5+4} = 3$$

$$x = M \longrightarrow y = \sqrt{e^M + 4} = y_M$$

$$(x = \infty \longrightarrow y = \infty).$$

Sostituiamo:

$$I_M = \int_3^{y_M} \frac{y \cdot 2y}{(y^2+1)(y^2-4)}\, dy$$

$$I_M = \int_3 \frac{\quad}{(y^2+1)(y^2-4)}$$

$$= 2 \int_3^{y_M} \frac{y^2}{(y^2+1)(y^2-4)} \, dy$$

$$= 2 \int_3^{y_M} \frac{y^2-4+4}{(y^2+1)(y^2-4)} \, dy$$

$$= 2 \int_3^{y_M} \frac{1}{y^2+1} \, dy + 8 \int_3^{y_M} \frac{1}{(y^2+1)(y^2-4)}$$

Fratti semplici

$$I = \lim_{M \to \infty} I_M = \frac{2}{5} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(3) \right) + \frac{2}{5} \log 5 .$$

ES.4 Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ discutere la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(n \left(e^{1/n} - 1 \right) - \frac{\alpha}{n} \right)$$

Soluzione. Con cura studio l'argomento del logaritmo:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \quad x \to 0$$

$$e^{1/n} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3!} \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Dunque

$$a_n = \log\left(\quad \right) = \log\left[n \left(\cancel{1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \cancel{-1} \right) - \frac{\alpha}{n} \right]$$

$$= \log\left[1 + \frac{1}{\quad} + \frac{1}{\quad} + o\left(\frac{1}{\quad}\right) - \alpha \right] \to \log 1$$

$$= \log\left[1 + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{\alpha}{n}\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} \log 1 = 0$$

$$= \log\left[1 + \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\frac{1}{n} + \frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] =$$

Uso $\log(1+x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$

$$= \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\frac{1}{n} + \frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + o(\ldots)$$

1° caso $\alpha = 1/2$

Faccio confronto asintotico con la serie

$$\sum \frac{1}{n^2} < \infty \quad \text{che}$$

converge. Infatti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{6} \neq 0$$

In questo caso $\sum a_n$ converge.

2° caso $\alpha \neq 1/2$. Quindi $a_n = \left(\frac{1}{2} - \alpha\right) \cdot \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

da cui

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}{1/n} = \frac{1}{2} - \alpha \neq 0$$

Conclusione

TCA

$\sum \frac{1}{n}$ diverge $\Rightarrow$ $\sum a_n$ diverge.

ES. 5 Rappresentare nel piano complesso le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ della disequazione:

$$\left|\, |z-1|^2 - \left|\frac{z-\bar{z}}{2}\right|^2 - 1 \right| \geq \operatorname{Im} z - 3.$$

Sol. $z = x + iy \quad x, y \in \mathbb{R}$.

$$|z-1|^2 = |x+iy-1|^2 = |(x-1)+iy|^2 \underset{DEF}{=} (x-1)^2 + y^2$$

$$\left|\frac{z-\bar{z}}{2}\right|^2 = \left|\frac{1}{2}\left(\cancel{x}+iy-(\cancel{x}-iy)\right)\right|^2$$

$$= \left|\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}iy\right|^2 = |iy|^2 = y^2$$

Sost. entrambe nella diseq:

$$\left|(x-1)^2 \cancel{+y^2} \cancel{-y^2} - 1\right| \geq y - 3$$

$$\left|x^2 - 2x \cancel{+1} \cancel{-1}\right| \geq y - 3$$

Conclusione:

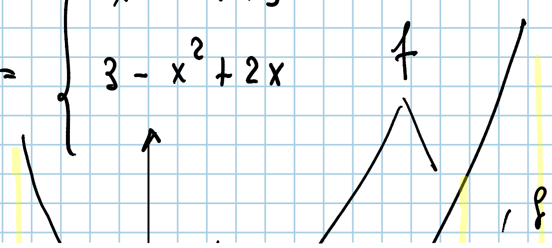
$$y \leq \underline{3 + |x^2 - 2x|} = f(x)$$

Disegno grafico di f:

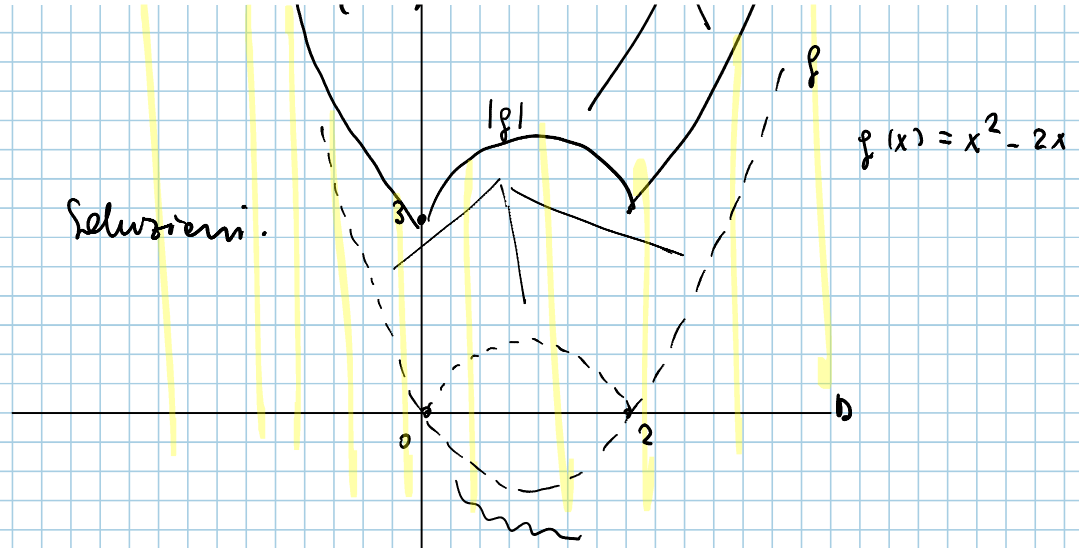
$$x^2 - 2x \geq 0 \iff x(x-2) \geq 0 \iff x \in (-\infty, 0] \cup [2, \infty)$$

Dunque

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3 & x \in (-\infty, 0] \cup [2, \infty) \\ 3 - x^2 + 2x & 0 < x < 2 \end{cases}$$



Soluzioni.



ES. 6 Calcolare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$

$$\left| z^2 \left(\overline{(z+4i)} - z \right) \right| = \left| z(z+4i) - z\bar{z} \right|$$

e rappr.

Sol. $z = 0$ cert. è soluzione.

$$|z|^2 \cdot \left| \left(\overline{(z+4i)} - z \right) \right| = |z| \left| \left((z+4i) - \bar{z} \right) \right|$$

Semplifico per $|z| \neq 0$

$$|z| \cdot \left| \overline{(z+4i)} - z \right| = \left| (z+4i) - \bar{z} \right|$$

$$|z| \cdot \left| \overline{(z+4i)} - z \right| = \left| \overline{(z+4i)} - z \right|$$

Certamente $\left| \overline{z+4i} - z \right| = 0$ danno soluzioni

Se poi $\left| \quad \right| \neq 0$ posso dividere e trovo

$$|z| = 1 \text{ sono soluzioni}$$

Devo capire $\left| \overline{z+4i} - z \right| = 0 \iff \overline{z+4i} - z = 0$

$$\left|\overline{z+4i} - z\right| = 0 \iff \overline{z+4i} - z = 0$$

$$\iff \bar{z} - 4i - z = 0$$

$$\iff \cancel{x} - iy - 4i - \cancel{x} - iy = 0$$

$$\iff -2iy = 4i$$

$$\iff y = -2$$

Riassunto :