Lezione 5

mercoledì 16 ottobre 2013
14:25

Polinomi complessi

Def. Siano $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ numeri complessi.
Una espressione della forma

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

si dice polinomio complesso della variabile $z \in \mathbb{C}$.
Se poi $a_n \neq 0$ diremo che $P(z)$ ha grado $n \geq 0$.

Diremo che un numero complesso $z_0 \in \mathbb{C}$ è una radice del polinomio $P(z)$ se risulta:

$$P(z_0) = 0$$

ovvero: $P(z)$ calcolato nel punto $z = z_0$ si annulla.

Teorema (Fondamentale dell'algebra) Sia $P(z)$ un polinomio complesso di grado $n \geq 1$.
Allora $P(z)$ ha esattamente n radici contate con la loro molteplicità.

Dim. Omessa.

Esempio Ad esempio il polinomio reale $P(x) = x^2 + 1$ non ha radici reali $x \in \mathbb{R}$.

Invece il polinomio complesso $P(z) = z^2 + 1$ ha esattamente 2 radici che sono:

$$z^2 + 1 = 0 \iff z^2 = -1 \iff z = i$$

oppure $z = -i$.

<u>Osservazione 1</u> Sia $P(z)$ un polinomio complesso di grado $n \geq 1$. Supponiamo che $a_n = 1$.
Allora possiamo fattorizzare $P(z)$ nel seguente modo:

$$P(z) = (z - z_1)\cdot(z - z_2)\cdot \ldots \cdot (z - z_n)$$

dove $z_1, z_2 \ldots z_n \in \mathbb{C}$ sono le radici di $P(z)$.

<u>Osservazione 2</u> sia $P(z)$ il polinomio complesso

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, \qquad z \in \mathbb{C},$$

dove i coefficienti $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ sono numeri reali, ovvero

$$\overline{a_k} = a_k$$

Allora, nota una radice $z \in \mathbb{C}$ di $P(z)$ se ne conosce automaticamente una seconda, precisamente $\bar{z}$.
Ovvero:

$$P(z) = 0 \iff P(\bar{z}) = 0 .$$

Dim. Osservo che:

$$P(z) = 0 \implies \boxed{\overline{P(z)}} = \overline{0} = 0$$

Dove:

$$\overline{P(z)} = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k z^k} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k z^k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k}\ \overline{z^k} = \sum_{k=0}^{n} a_k \bar{z}^k = P(\bar{z})$$

Dunque:

$$P(z) = 0 \implies \overline{P(z)} = 0 \implies P(\bar{z}) = 0$$

Dunque: $\bar{z}$ è radice di P. $\square$

Esercizio 1 Calcolare le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$z^3 = 8i$$

Scriverle in forma algebrica e rappresentarle nel piano di Gauss $\mathbb{C}$.

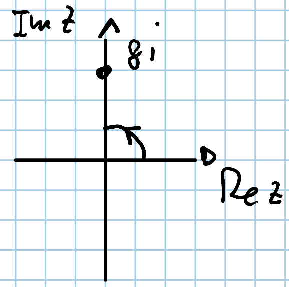
Svolgimento. Interpretazione: Calcolare le radici terze di $w = 8i$.

Modulo di w

$$R = |w| = |8i| = \sqrt{0^2 + 8^2} = 8 \geq 0$$

Argomento:

$$\varphi = \arg(w) = +\frac{\pi}{2}$$



Scrivo w in forma esponenziale

$$8i = w = R e^{i\varphi} = 8 e^{i\pi/2}.$$

Scrivo anche l'incognita $z \in \mathbb{C}$ in forma esponenziale:

$$z = r e^{i\vartheta} \qquad \text{con} \qquad \underset{|z|}{\overset{\parallel}{r}} \geq 0 \quad \vartheta = \arg(z) \in [0, 2\pi)$$

con r e ϑ da determinare.

L'equazione

$$(re^{i\vartheta})^3 = z^3 = 8i = 8 e^{i\pi/2}$$

$$\overset{\parallel}{r^3 (e^{i\vartheta})^3} = r^3 e^{i 3\vartheta}$$

Ottengo il sistema

$$\begin{cases} r^3 = 8 \\ 3\vartheta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

La prima eq. fornisce $r = 2$.

La seconda:

$$\vartheta_k = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3} k\pi \,, \qquad k = 0, 1, 2$$

Le soluzioni sono

$$z_k = 2 e^{i\vartheta_k} \qquad k = 0, 1, 2$$
$$= 2 e^{i\left(\pi/6 + \frac{2k}{3}\pi\right)}$$

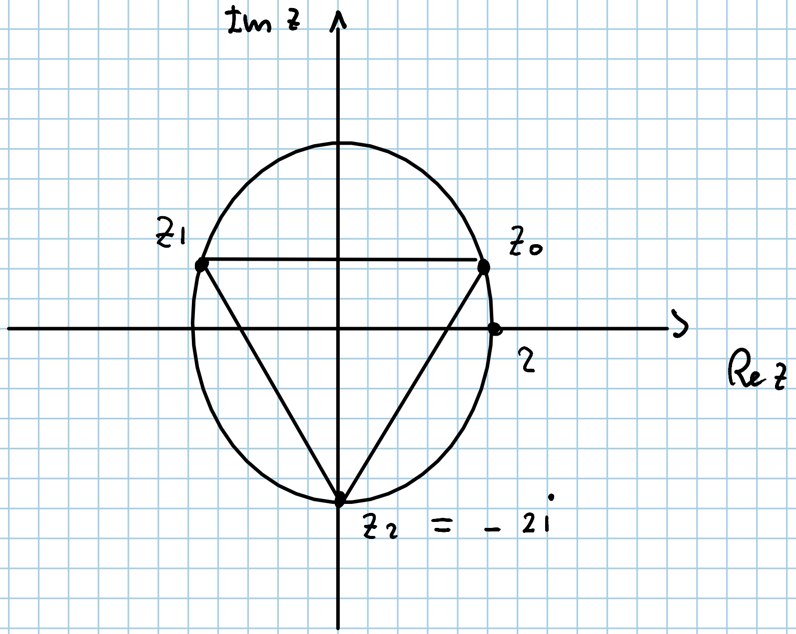
Dunque

$$z_0 = 2 e^{i\frac{\pi}{6}} = 2 \left(\cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6} \right)$$
$$= 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = \sqrt{3} + i$$

$$z_1 = 2 e^{i\frac{5}{6}\pi} = 2 \left(\cos\frac{5}{6}\pi + i \sin\frac{5}{6}\pi \right)$$

$$= 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} + i$$

$z_2 =$ per casa



$\square$

Es. 2 Calcolare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$z^4 - 2i\sqrt{3}\, z^2 - 4 = 0$$

e rappresentarle nel piano di Gauss.

Svolgimento. Per il TFA ci sono 4 soluzioni.

Pongo $z^2 = w$ con $w \in \mathbb{C}$ nuova incognita complessa.

Ottengo l'equazione:

$$w^2 - 2i\sqrt{3}\, w - 4 = 0$$

Uso la formula per le radici di polinomi di 2° grado:

$$w_{\pm} = \frac{2i\sqrt{3} \pm \sqrt{(-2i\sqrt{3})^2 - 4\cdot(-4)}}{2}$$

$$w_\pm = \frac{\ldots}{2}$$

$$= \frac{2i\sqrt{3} \pm \sqrt{-12+16}}{2}$$

$$= \frac{2i\sqrt{3} \pm 2}{2}$$

$$= i\sqrt{3} \pm 1$$

Dunque ora devo risolvere

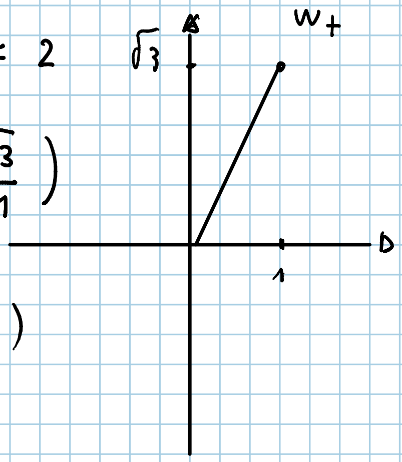
$$z^2 = w_+ \quad , \quad \text{e poi.}$$

$$z^2 = w_-$$

Risolvo la prima: $z^2 = w_+ = 1 + i\sqrt{3}$

Calcolo le due radici quadrate di w_+:

$$|w_+| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$$



$$\arg(w_+) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right)$$

$w_+ \in 1^\circ$ Quadrante

$$= \operatorname{arctg}(\sqrt{3})$$

$$= \frac{\pi}{3}$$

Dunque $w_+ = 2e^{i\pi/3}$.

Con $z = re^{i\vartheta}$, $r \geq 0$ e $\vartheta \in [0, 2\pi)$, avremo

$$r^2 e^{i2\vartheta} = (r e^{i\vartheta})^2 = z^2 = w_+ = 2 e^{i\pi/3}$$

Sistema:

$$\begin{cases} r^2 = 2 \\ 2\vartheta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \qquad k = 0, 1 \end{cases}$$

Trovo $r = \sqrt{2}$ e

$$\vartheta_k = \frac{\pi}{6} + k\pi \qquad k = 0, 1$$

le prime due soluzioni sono

$$z_0 = \sqrt{2}\, e^{i\pi/6} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$z_1 = \sqrt{2}\, e^{i7\pi/6} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{6}\pi + i \sin\frac{7}{6}\pi\right)$$

$$z_0 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$z_1 = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\,\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{6}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ora dovrei risolvere $z^2 = w_-$ etc. ..

Mi interrompo.

Esercizio 3 Calcolare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$z^3 = 9\bar{z}.$$

Svolgimento. Osservo che certamente $z = 0$ è una soluzione.

Idea: scrivere $z = x+iy$, sviluppare $(x+iy)^3 = \dots$
$\bar{z} = x - iy$

Complicato.

Cerco soluzioni in forma esponenziale $z = re^{i\vartheta}$
con $r \geq 0$ e $\vartheta \in [0, 2\pi)$ da determinare.

$$z^3 = (re^{i\vartheta})^3 = r^3 e^{i3\vartheta}$$

Poi

$$\bar{z} = \overline{re^{i\vartheta}} = r\,\overline{e^{i\vartheta}} = r\,\overline{(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)}$$

$$= r(\cos\vartheta - i\sin\vartheta) = r(\cos(-\vartheta) + i\sin(-\vartheta))$$

$$= r e^{-i\vartheta}$$

Sostituisco nell'equazione:

$$r^3 e^{i3\vartheta} = z^3 = 9\bar{z} = 9r e^{-i\vartheta}$$

Ho il sistema

$$\begin{cases} r^3 = 9r & \Rightarrow \quad r = 0 \quad \text{oppure} \quad r^2 = 9 \iff r = 3 \qquad r \geq 0 \\ 3\vartheta = -\vartheta + 2k\pi & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Risolvo la seconda:

$$4\vartheta = 2k\pi \iff \vartheta_k = \frac{k}{2}\pi, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

Le soluzioni sono

$$z_k = 3e^{i\vartheta_k} = 3e^{i\frac{k}{2}\pi} \qquad k = 0, 1, 2, 3$$

cui si aggiunge $z_4 = 0$. Disegno omesso.

$\square$

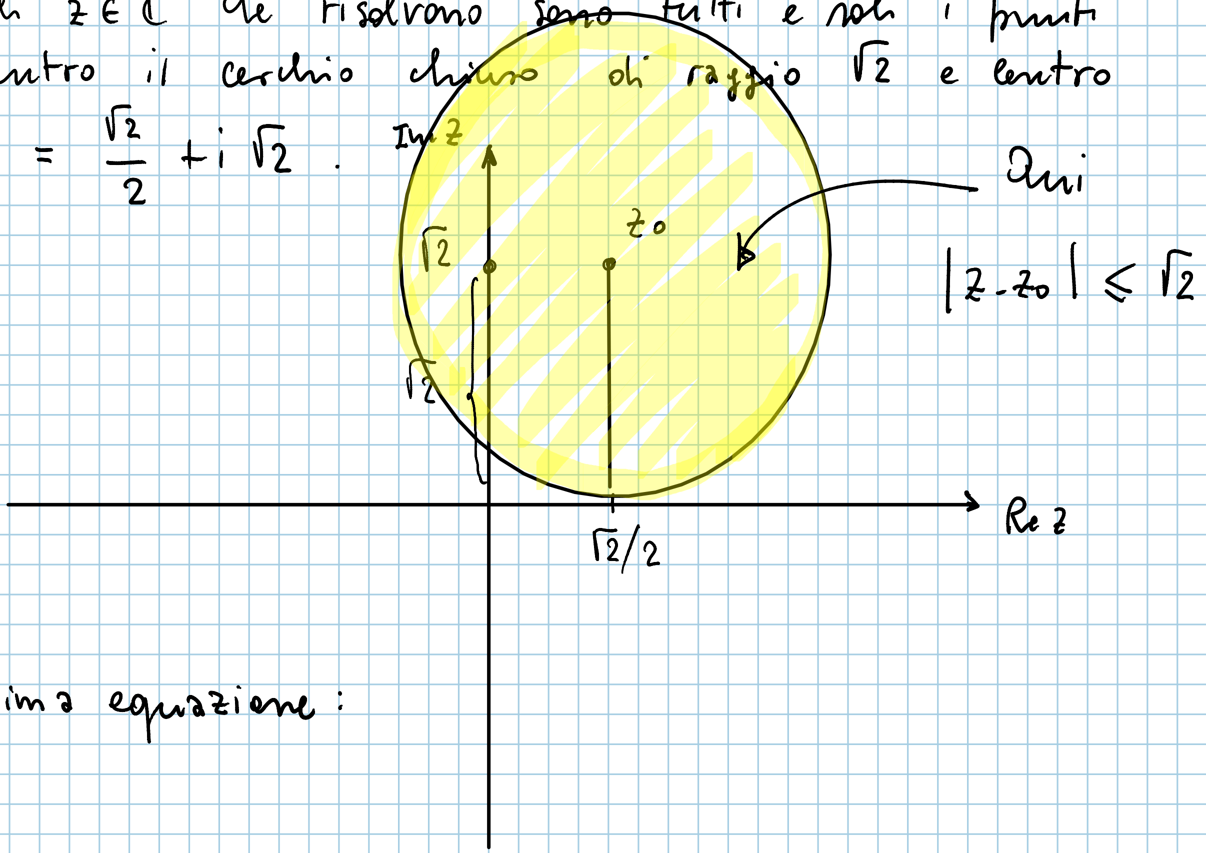
Esercizio 4 Disegnare nel piano di Gauss $\mathbb{C}$ l'insieme dei numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\begin{cases} \operatorname{Re}\left(i z^2 - i \bar{z}^2\right) \geq -4 \\ \left| z - \frac{\sqrt{2}}{2} - i\sqrt{2} \right| \leq \sqrt{2} \end{cases}$$

Soluzione. Seconda disequazione:

$$|z - z_0| \leq \sqrt{2} \qquad z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\sqrt{2}$$

Gli $z \in \mathbb{C}$ che risolvono sono tutti e soli i punti dentro il cerchio chiuso di raggio $\sqrt{2}$ e centro $z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\sqrt{2}$.



Prima equazione: