Lezione 6

giovedì 17 ottobre 2013
14:21

Risolvo la disequazione:

$$\mathrm{Re}\,(i z^2 - i \bar{z}^2) \geq -4$$

$z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$

Conti preparatori:

$$z^2 = (x+iy)^2 = x^2 + 2ixy + (iy)^2$$
$$= x^2 + 2ixy - y^2$$
$$= x^2 - y^2 + 2ixy$$

$$\bar{z}^2 = (x - iy)^2 = x^2 - 2ixy + (-iy)^2$$
$$= x^2 - 2ixy - y^2$$

Formo

$$iz^2 - i\bar{z}^2 = i(x^2 - y^2 + 2ixy) - i(x^2 - 2ixy - y^2)$$
$$= \cancel{ix^2} - \cancel{iy^2} - 2xy - \cancel{ix^2} - 2xy + \cancel{iy^2}$$
$$= -4xy$$

$$\mathrm{Re}\,(iz^2 - i\bar{z}^2) = \mathrm{Re}\,(-4xy) = -4xy$$

La diseq. da discutere è

$$-4xy \geq -4 \iff -xy \geq -1$$

$$\iff \boxed{xy \leq 1}$$

$\Longleftarrow$ $\boxed{xy \le 1}$

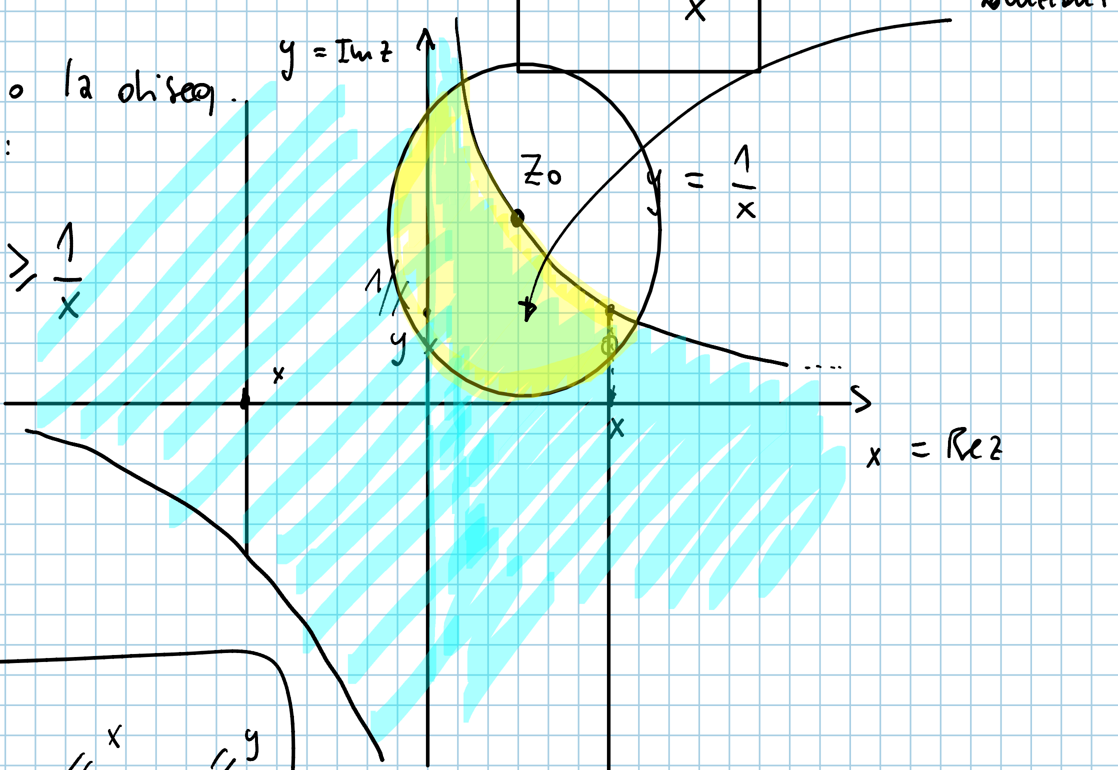
Dunque la seconda diseq. è verificata per tutti i punti nell'insieme

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \le 1\}$$

Se $x > 0$ la diseq. diventa $\boxed{y \le \frac{1}{x}}$

Se $x < 0$ la diseq. diventa:

$$y \ge \frac{1}{x}$$



centro

$$z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

" x " " y "

$$x \cdot y = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} = 1$$

Esercizio 5 Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ un parametro fissato.

Disegnare nel piano complesso il seguente insieme:

$$S_\alpha = \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{\bar{z} + 1 - i\alpha}{z+1} \in \mathbb{R} \right\}$$

$$S_\alpha = \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{\bar{z}+1-i\alpha}{z+1} \in \mathbb{R} \right\}$$

La parte Im deve $=0$.

Soluzione. Osservo che deve essere $z+1 \neq 0 \iff z \neq -1$.

L'insieme S_α è formato dai punti $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\operatorname{Im}\left(\frac{\bar{z}+1-i\alpha}{z+1} \right) = 0$$

Conti preparatori

$$\frac{\bar{z}+1-i\alpha}{z+1} \cdot \frac{\bar{z}+1}{\bar{z}+1} = \frac{\bar{z}^2 + \bar{z} + \bar{z} + 1 - i\alpha\bar{z} - i\alpha}{z\bar{z} + z + \bar{z} + 1} =$$

$$= \frac{\bar{z}^2 + 2\bar{z} + 1 - i\alpha\bar{z} - i\alpha}{|z|^2 + z + \bar{z} + 1}$$

$z = x+iy$

$\bar{z} = x-iy$

$$= \frac{(x-iy)^2 + 2(x-iy) + 1 - i\alpha(x-iy) - i\alpha}{x^2+y^2+x+\cancel{iy}+x-\cancel{iy}+1}$$

$$= \frac{x^2 - 2ixy - y^2 + 2x - 2iy + 1 - i\alpha x - \alpha y - i\alpha}{x^2+y^2+2x+1}$$

$$= \frac{x^2-y^2+2x+1-\alpha y + i(-2xy-2y-\alpha x-\alpha)}{x^2+y^2+2x+1}$$

Quindi trovo l'eq.:

$$\boxed{0} = \boxed{\operatorname{Im}\left(\frac{\bar{z}+1-i\alpha}{z+1}\right)} = \frac{-2xy-2y-\alpha x-\alpha}{(x+1)^2+y^2}$$

$$\iff -2xy-2y-\alpha x-\alpha = 0$$

$$\iff 2xy+2y+\alpha x+\alpha = 0$$

$$\iff 2y(x+1)+\alpha(x+1) = 0$$

$$\iff \boxed{(x+1)(2y+\alpha) = 0}. \qquad z = x+iy$$

$$\iff x+1 = 0 \quad \text{oppure} \quad 2y+\alpha = 0$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$x = -1 \qquad\qquad y = -\alpha/2$$

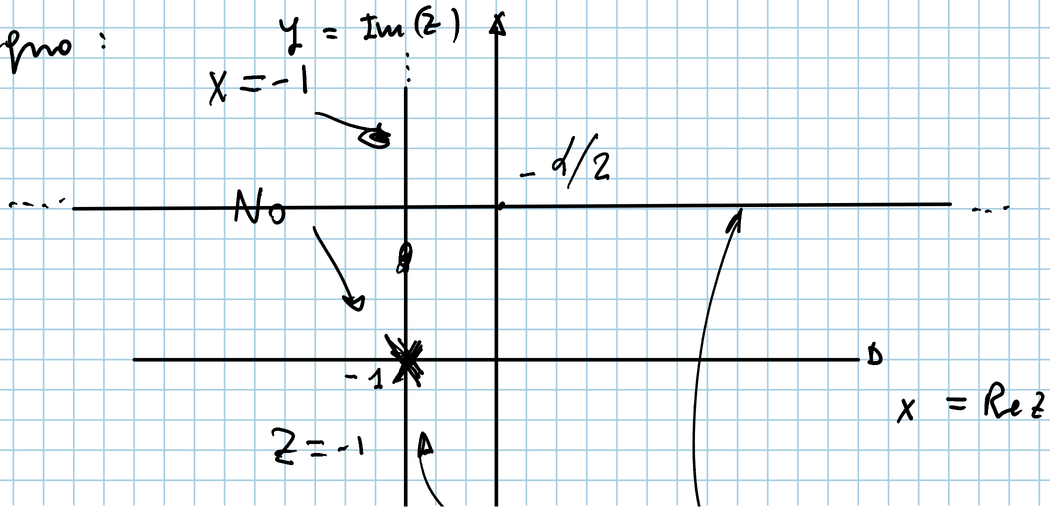
Quindi la retta $\{z = x+iy \in \mathbb{C} : x = -1\}$ ci dà soluzioni. Devo escludere però $z = -1$.

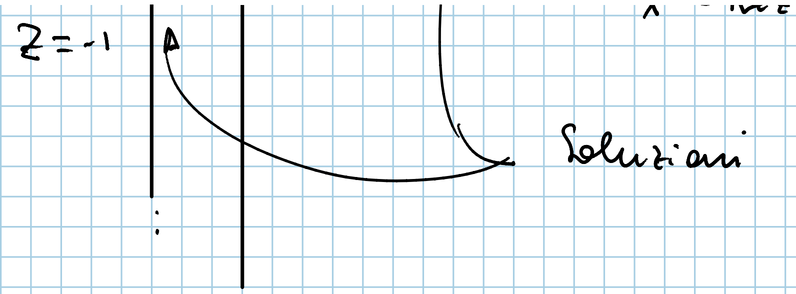
Inoltre anche la retta

$$\{z = x+iy \in \mathbb{C} : y = -\alpha/2\}$$

ci fornisce soluzioni. Non ci sono altre soluzioni.

Disegno :





$\square$

Esercizio 6 Determinare $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che $z_0 = i$ sia radice del polinomio complesso

$$P(z) = z^4 - 2z^3 + \lambda z^2 - 2z + 2 .$$

Calcolare quindi tutte le radici.

Soluzione: Devo avere:

$$0 = P(z_0) = P(i) = i^4 - 2i^3 + \lambda i^2 - 2i + 2 =$$

$$= i^2 \cdot i^2 - 2 i^2 \cdot i - \lambda - 2i + 2$$

$$= 1 + \cancel{2i} - \lambda - \cancel{2i} + 2 = 3 - \lambda$$

Ho determinato: $\lambda = 3$. Dunque

$$P(z) = \boxed{z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 2} \quad \text{Coeff. Reali}$$

$z_0 = i$ è radice $\Rightarrow$ $\bar{z}_0 = -i$ è radice.

Dunque la terza radice sarà $z_1 \in \mathbb{C}$ da determinare e la quarta sarà $\bar{z}_1$.

Fattorizzo

$$P(z) = (z-i)(z+i)(z-z_1)(z-\bar{z}_1)$$

$$= \boxed{(z^2+1)}(z^2 - z\bar{z}_1 - z_1 z + |z_1|^2)$$

$$z_1 \bar{z}_1 = |z_1|^2$$

$$= z^4 - z^3 \bar{z}_1 - z_1 z^3 + z^2 |z_1|^2 + z^2 - z\bar{z}_1 - z_1 z + |z_1|^2 ,$$

$$P(z) = z^4 - (z_1+\bar{z}_1)\, z^3 + (|z_1|^2+1)\, z^2 - (z_1+\bar{z}_1)\, z + |z_1|^2$$

$$P(z) = z^4 - 2\, z^3 + 3\, z^2 - 2\, z + 2$$

ottengo il sistema: $\qquad z_1 = x+iy$

$$\begin{cases} z_1+\bar{z}_1 = 2 \\ |z_1|^2+1 = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+iy+x-iy = 2 \\ x^2+y^2 = 2 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} z_1+\bar{z}_1 = 2 \\ |z_1|^2 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x = 2 \\ x^2+y^2 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$y = \pm 1$$

Dunque $\quad z_1 = 1+i$

$\bar{z}_1 = 1-i$. $\qquad$ Fine.

Esercizio 7 Disegnare nel piano complesso l'insieme delle $z \in \mathbb{C}$ tali che:

$$(*) \quad \frac{\sqrt{4-|z-4|}}{\sqrt{4-|z+4i|}} > 1 .$$

Soluzione: Ho condizioni di esistenza:

1^ Cond: $4-|z-4| \geq 0 \iff |z-4| \leq 4$

2^ Cond. $4-|z+4i| > 0 \iff |z+4i| < 4$

$$(*) \iff \sqrt{4-|z-4|} > \sqrt{4-|z+4i|}$$

$$\iff \cancel{4} - |z-4| > \cancel{4} - |z+4i|$$

$\iff \quad |z+4i| > |z-4|$

$\iff \quad |z+4i| > |z-4|$

$z = x+iy$

$\iff \quad |x+iy+4i| > |x+iy-4|$

$\iff \quad |x+i(y+4)|^2 > |(x-4)+iy|^2$

$\iff \quad x^2+(y+4)^2 > (x-4)^2+y^2$

$\iff \quad x^2+y^2+8y+\cancel{16} > x^2-8x+\cancel{16}+y^2$

$\iff \quad 8y > -8x$

$\iff \quad 8y+8x>0$

$\iff \quad \boxed{y+x>0}$ ovvero $\boxed{y>-x}$