Lezione 9

giovedì 24 ottobre 2013
14:13

Esercizio 3 Calcolare il limite

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^2 - \log(n+1)}{n} = \infty$$

(i) Usando la definizione di limite

(ii) Usando i teoremi sui limiti.

(i) Devo verificare che:

$$\forall M \in \mathbb{R} \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall n \geq \bar{n} \text{ si ha } \frac{n^2 - \log(n+1)}{n} > M$$

Vorrei usare:

$$(F(n)) \qquad \log(1+n) \leq n \qquad \forall n$$

Induzione:

- Base: per $n=0$ trovo $0 = \log(1+0) \leq 0$
- Passo induttivo: $F(n) \Longrightarrow F(n+1)$

$$\log(2+n) = \log \frac{(2+n)(1+n)}{1+n} =$$

$$= \log \frac{1+1+n}{1+n} + \underbrace{\log(1+n)}_{\leq n}$$

$$\leq \log\left(1 + \underbrace{\frac{1}{1+n}}_{\leq 1}\right) + n \leq \underbrace{\log 2}_{<1} + n < 1+n$$

Fine.

Dunque

$$\frac{n^2 - \log(n+1)}{n} \geq \frac{n^2 - n}{n} = n - 1 > M$$

n $\qquad$ n

Dunque se $n - 1 > M$ allora $\dfrac{n^2 - \log(n+1)}{n} > M$

$$\Updownarrow$$

$n > M + 1$ OK

(ii) $$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - \log(n+1)}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(\underbrace{n}_{\to\,\infty} - \underbrace{\frac{\log(n+1)}{n}}_{\xrightarrow{n\to\infty}\,0} \right) = \infty .$$

Fatto Noto

Esercizio 4 Calcolare :

$$\boxed{L = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - n\sin(n)}{3n^2 + \cos n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}\left(1 - \frac{\sin(n)}{n}\right)}{\cancel{n^2}\left(3 + \frac{\cos n}{n^2}\right)} = \frac{\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{\sin n}{n}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(3 + \frac{\cos n}{n^2}\right)}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0}$$ succ. infinitesima $\cdot$ limitata

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad ||$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ infinitesima

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n^2} = 0$$

Conclusione : $L = \dfrac{1}{3}$.

Esercizio 5 Calcolare il seguente limite

$$\lim n^{2/3} \cdot \left(\sqrt[3]{n+1} - \boxed{\sqrt[3]{n}} \right)$$

$$\lim_{n\to\infty} n^{2/3}\cdot\left(\sqrt[3]{n+1}-\boxed{\sqrt[3]{n}}\right)$$
$$\infty \cdot (\infty - \infty)$$

Soluzione.

$$(\dots) = \sqrt[3]{n}\left(\frac{\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt[3]{n}}-1\right)$$

$$= \sqrt[3]{n}\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}-1\right)$$
$$\infty \cdot \quad 1 \quad - 1$$

Mi ricordo del fatto che $\sqrt[3]{n+1}\ \sqrt[3]{n}\ \ 0$

$$(x^3-y^3) = (x-y)\underline{\underline{(x^2+xy+y^2)}}$$

Precisamente:

$$n^{2/3}\,\frac{\left(\boxed{\sqrt[3]{n+1}}-\sqrt[3]{n}\right)\left(\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n(n+1)}+\sqrt[3]{n^2}\right)}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n(n+1)}+\sqrt[3]{n^2}} =$$

$$= \cancel{n^{2/3}}\,\frac{\cancel{n}+1-\cancel{n}}{\cancel{\sqrt[3]{n^2}}\left(\sqrt[3]{(1+\frac{1}{n})^2}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}+1\right)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{3}.$$

Esercizio 6 Calcolare:

$$L = \lim_{n\to\infty}\frac{n\,2^n+(\log n)^4}{3^n+n^2}\qquad\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

svolgimento:

$$L = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n\,2^n}{3^n}\right)\cdot\frac{1+\frac{(\log n)^4}{n\,2^n}}{1+\frac{n^2}{\dots}}$$

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{}{3^n} \cdot \frac{}{1 + \frac{n^2}{3^n}}$$

dove

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\log n)^4}{n \cdot 2^n} = 0 \quad \text{Fatto Noto}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{3^n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\,2^n}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\left(\frac{3}{2}\right)^n} = 0 \quad \text{Fatto Noto} \quad \frac{3}{2} > 1$$

Conclusione:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\,2^n}{3^n} \cdot \frac{1 + \frac{(\log n)^4}{n\,2^n}}{1 + \frac{n^2}{3^n}} = 0 \cdot 1 = 0.$$

Esercizio 7 Calcolare il limite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 \log n + \frac{1}{n}} = 1$$

Soluzione:

$$\sqrt[n]{n^2 \log n + \frac{1}{n}} \le \sqrt[n]{n^2 (n-1) + 1} \le$$

$$\le \sqrt[n]{n^3 + n^3} = \sqrt[n]{2n^3} =$$

$$\sqrt[n]{2} \cdot \left(\sqrt[n]{n}\right)^3 \longrightarrow 1$$

$$= \sqrt[n]{2} \cdot \left(\sqrt[n]{n}\right)^{3} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$$

$$\sqrt[n]{2} \to 1, \qquad \sqrt[n]{n} \to 1$$

Poi

$$\sqrt[n]{\underbrace{n^2 \log n}_{\substack{\geq 0 \ \forall n \geq 1}} + \frac{1}{n}} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$$

Per il Teorema del Confronto il limite è $L = 1$.

Successioni Monotóne

Def Una successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di numeri reali si dice:

i) crescente se $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

ii) strettamente crescente se $a_{n+1} > a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

iii) decrescente se $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

iv) strett. decrescente se $a_{n+1} < a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Una succ. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si dice monotóna se è crescente oppure decrescente.

Proposizione Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione monotóna e limitata. Allora esiste finito il

$$L = \lim_{n \to \infty} a_n \in \mathbb{R}.$$

Supponiamo che $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sia crescente.

Dim. L'insieme $A = \{a_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ è limitato perché $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata.

Dunque per l'assioma di completezza esiste finito

$$L := \sup A \in \mathbb{R}$$

Ora provo che $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

Sia $\varepsilon > 0$. Siccome $L = \sup A$ allora esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$a_{\bar{n}} > L - \varepsilon$$

Ora per $n \geq \bar{n}$ si ha: (essendo (a_n) crescente)

$$L - \varepsilon < a_{\bar{n}} \leq a_n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{perché } L \\ \text{è un maggiorante di } A}}{\leq} L < L + \varepsilon$$

Dunque

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \bar{n}\ \forall n \geq \bar{n} : \quad |a_n - L| < \varepsilon .$$

Ovvero $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. $\square$

Commenti:

(1) Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente ma non è superiormente limitata allora

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty .$$

(2) Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente, allora:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf \{a_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

Esercizio Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la seguente successione definita in modo ricorsivo:

$$a_0 = 0 \quad e \quad a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}\,, \quad n \geq 0.$$

Provare che la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge e quindi calcolarne il limite.

Svolgimento. Guardo la funzione $f(x) = \sqrt{2+x}$.
É vero che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente? Ovvero: $a_{n+1} \geq a_n$

$$\Updownarrow$$

Questo è come studiare la disequazione $\underbrace{\sqrt{2+a_n}}_{= f(a_n)} \geq a_n$?

$$f(x) \geq x$$

ovvero

$$\sqrt{2+x} \geq x \qquad (x \geq 0)$$

$$2+x \geq x^2$$

$$x^2 - x - 2 \leq 0 \qquad \text{Radici} \quad x_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$$

$$x_\pm = \frac{1 \pm 3}{2} \quad \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

Dunque diseq. verificata per

$$-1 \leq x \leq 2$$

Dunque se $\boxed{a_n \leq 2}$? allora $a_{n+1} \geq a_n$

Provo a dimostrarlo per induzione:

- $a_0 = 0 \leq 2$ OK
- Vorrei provare che $a_n \leq 2 \Longrightarrow a_{n+1} \leq 2$ Passo Induttivo

$$a_{n+1} \leq 2 \iff \sqrt{2+a_n} \leq 2$$

$$\iff 2 + a_n \leq 4$$

$\Longleftarrow \quad a_n \leq 2.$

Dal principio di induzione: $a_n \leq 2 \quad \forall n$

e quindi per lo studio precedente $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

è crescente.

Per la prop. precedente esiste

$$L = \lim_{n \to \infty} a_n \leq 2$$

Calcolo L. Riparto da qui:

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$L = \sqrt{2 + L}$$

Ho dedotto questo

$$\Downarrow$$

$$L^2 = 2 + L \iff \begin{cases} L = -1 & \text{NO} \\ L = 2 & \text{Sì} \end{cases}$$

Questo è il limite.