

Esercizio 1. (Funzioni integrabili).

- 1) Stabilire se la funzione $f(x) = (1-x)^{-1/2}$ è Riemann-integrabile nell'intervallo $(0, 1)$.
- 2) Stabilire se la funzione $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ così definita

$$g(x) = \begin{cases} \sin(x) + x - 1 & \text{se } x \in [-1, 0) \\ \sin(x) + x + 1 & \text{se } x \in [0, 1], \end{cases}$$

è Riemann-integrabile nell'intervallo $(-1, 1)$.

Risposte: 1) No. 2) Sì.

Esercizio 2. (Integrali razionali) Calcolare i seguenti integrali definiti e indefiniti

$$\begin{aligned} 1) \int \frac{1}{9x^2 + 12x + 5} dx, \quad 2) \int \frac{1}{2x^2 + 3x - 2} dx, \quad 3) \int_2^3 \frac{x^3 + 1}{x(x-1)^2} dx, \\ 4) \int_3^4 \frac{x-3}{x(x-1)(x-2)} dx, \quad 5) \int_0^{1/2} \frac{x^4}{1-x^4} dx, \quad 6) \int_1^2 \frac{x^2 - 1}{x^2(x^2 + 1)} dx. \end{aligned}$$

Risposte: 3) $2 + \log 3$; 4) $\frac{5}{2} \log 3 - \frac{11}{2} \log 2$.

Esercizio 3. (Per sostituzione) Calcolare i seguenti integrali definiti e indefiniti

$$\begin{aligned} 1) \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx, \quad 2) \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x - 3 \sin x + 2} dx, \quad 3) \int_{\log 2}^{\log 3} \frac{1 + 2e^x}{e^{2x} - 1} dx, \\ 4) \int \sqrt{1+x^2} dx, \quad 5) \int_0^1 \frac{1 + \sqrt{x}}{1 + x + \sqrt{x}} dx, \quad 6) \int \sqrt{\frac{1+e^x}{1-e^x}} dx, \quad 7) \int \frac{\sqrt{2-x^2}}{1-x^2} dx. \end{aligned}$$

Risposte: 1) $\frac{\pi}{6}$; 2) $\log\left(\frac{9-4\sqrt{2}}{8-4\sqrt{2}}\right)$; 3) $\frac{3}{2} \log 2 - \frac{1}{2} \log 2$.

Esercizio 4. (Sostituzioni parametriche) Calcolare i seguenti integrali definiti e indefiniti

$$1) \int \frac{\cos x + 1}{\cos x - 1} dx, \quad 2) \int_0^{\pi/4} \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 - \sin x}} dx, \quad 3) \int \frac{1}{\sqrt{1 + \sin x}} dx.$$

Risposte: 1) $x + \frac{2}{\tan(x/2)} + C$; 2) $\sqrt{2}(\log 2 - \frac{\pi}{8})$.

Esercizio 5. (Per parti) Calcolare gli integrali definiti e indefiniti

$$1) \int_0^2 |x(e^x - 2)| dx, \quad 2) \int_1^e \log^2 x dx, \quad 3) \int_0^{\pi/6} \frac{x}{\cos^2(2x)} dx, \quad 4) \int e^{\beta x} \sin(\alpha x) dx.$$

Risposte: 1) $e^2 - 1 + 2 \log^2 2 - 4 \log 2$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{12} \pi + \frac{1}{4} \log 2$.