Analisi Matematica 1 — Foglio 3

Successioni numeriche — 17 Ottobre 2014

Esercizio 1. Determinare (e disegnare nel piano) tutte le coppie di numeri reali $x, y \in \mathbb{R}$ tali che sia verificata la disequazione

$$\frac{\log(xy^2 + 2x + 1)}{\log(x+1)} < 2.$$

Risposta: $x > y^2$.

Esercizio 2. Calcolare i seguenti limiti:

1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 3^n + n^2 \sin(n) + 1}{n^3 2^n + n^2 + (-1)^n}$; 2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[2n]{n!}}{n}$; 3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\log^4(n) + n\arctan(n)}{n^2 + \log n}$;

4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n+1]{n+1} \cdot \ldots \cdot \sqrt[2n]{2n}$; 5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 \log n + 1/n}$; 6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$.

Esercizio 3. Consideriamo la successione

$$a_n = \binom{2n}{n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

i) Verificare che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente;

ii) Verificare (per induzione) che $a_n \geq 2^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;

iii) Dedurre dal punto ii) che $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Esercizio 4. Determinare tutte le coppie di numeri reali $x, y \in \mathbb{R}$ tali che risulti

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x^{2n} + y^{4n}} = x^2.$$

Risposta: $x \geq y^2$ oppure $x \leq -y^2$.

Esercizio 5. Determinare il parametro $\beta \in \mathbb{R}$ in modo tale che il limite

$$L = \lim_{n\to\infty} n^\beta \left(\sqrt[4]{n+1} - \sqrt[4]{n} \right)$$

esista finito e risulti $L \neq 0$.

Esercizio 6. Dimostrare che la successione numerica

$$a_n = \frac{n^2 \cos(n\pi)}{n+1} \log\left(\frac{n}{n+1}\right), \quad n \geq 1,$$

non ha limite per $n \to \infty$.