Analisi Matematica 1 — Foglio 4

Serie numeriche 1 — 24 Ottobre 2014

Esercizio 1. Studiare la convergenza delle serie numeriche
i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+e^n}{(n+1)!}$; ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{3^n+5^n}$; iii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$.

Risposte: i) converge (Criterio del rapporto); ii) converge (Criterio della radice oppure confronto con la serie geometrica di ragione 4/5); iii) converge (Criterio del rapporto).

Esercizio 2. Studiare la convergenza delle seguenti serie
i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2+1}$; ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\log(n+1)}$; iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-\log n}$; iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-\log n}$.
Risposte: i) converge (Criterio del confronto, usare $\log n \le \sqrt{n}$ per $n \ge \bar{n}$); ii) diverge (confronto); iii) converge (Leibniz).

Esercizio 3. Determinare tutti i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}(\sqrt{1+n^4}-n^2)$$

converga. Risposta: $\alpha > -1$ (Criterio del confronto).

Esercizio 4. La rappresentazione decimale di un numero reale $x \in [0,1]$ è un'espressione del tipo

$$x = 0, a_1a_2a_3...a_na_{n+1}...$$

dove $a_n \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ è l'n-esima cifra decimale dopo la virgola, $n \ge 1$. Per definizione, il numero x è dato da

$$(*) \qquad x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}.$$

i) Verificare che la serie in $(*)$ converge;
ii) Verificare che il numero x dato da $(*)$ verifica $0 \le x \le 1$.

Esercizio 5. Calcolare la somma della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n}$. Risposta: 3/4. (Cfr. serie telescopiche).