Analisi Matematica 1

Anno Accademico 2014-2015

Roberto Monti

Versione del 24 Ottobre 2014

Contents

CHAPTER 1

Numeri naturali e reali

1. Numeri naturali e principio di induzione

Dal modo stesso in cui i numeri naturali vengono costruiti o definiti, discende la validità del *Principio d'induzione*.

Principio d'induzione. Sia $A(n)$ un'affermazione che riguarda il numero naturale $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che:

i) $A(0)$ (oppure $A(1)$ se $\mathbb{N}$ inizia da 1) è vera (*base induttiva*);
ii) $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (*passo induttivo*).

Allora $A(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

1.1. Formula per la somma geometrica. Per ogni numero reale $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}. \tag{1.1}$$

La formula vale anche se $x \in \mathbb{C}$ è un numero complesso $x \neq 1$. La prova è per induzione su $n \geq 1$. Per $n = 1$ si ha

$$\frac{1 - x^2}{1 - x} = \frac{(1 + x)(1 - x)}{1 - x} = 1 + x.$$

Supponiamo vera la formula (1.1) per $n \in \mathbb{N}$. Allora si ha

$$\begin{aligned} 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n+1} &= 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + x^{n+1} = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + x^{n+1} \\ &= \frac{1 - x^{n+1} + (1 - x)x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x}. \end{aligned}$$

1.2. Disuguaglianza di Bernoulli. Sia $x \in \mathbb{R}$ un numero reale tale che $x > -1$. Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx. \tag{1.2}$$

La prova è per induzione su $n \geq 1$. Per $n = 1$ si ha un'identità. Supponiamo vera le (1.2) per un certo $n \in \mathbb{N}$ e proviamola per $n + 1$:

$$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)^n (1 + x) \geq (1 + nx)(1 + x) = 1 + nx + x + nx^2 \geq 1 + (n + 1)x.$$

1.3. Formula del Binomio di Newton. Il *fattoriale* $n!$ si definisce per induzione nel seguente modo:

i) $0! = 1$ e $1! = 1$;
ii) $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$.

Dati $n, k \in \mathbb{N}$ con $k \leq n$, si definiscono i *coefficienti binomiali*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Siano $x, y \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Verifichiamo per induzione la formula per il Binomio di Newton:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Quando $n = 1$ la verifica è elementare:

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} x^{1-k} y^k = \binom{1}{0} x + \binom{1}{1} y = x + y.$$

Supponiamo vera la formula per n e proviamola per $n+1$:

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n = (x+y) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^{n-k+1} y^k \\
&= \binom{n}{0} x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] x^{n+1-k} y^k + \binom{n}{n} y^{n+1}.
\end{aligned}$$

Ora utilizziamo la formula di Stiefel, la cui verifica è un facile esercizio. Per ogni $n, k \in \mathbb{N}$ con $k \leq n$ vale l'identità

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

Si trova allora

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= \binom{n+1}{0} x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k + \binom{n+1}{n+1} y^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k.
\end{aligned}$$

2. Numeri reali

2.1. Relazioni d'ordine. Premettiamo la definizione di ordine totale.

Definizione 2.1 (Ordine totale). Una relazione $\leq$ su un insieme X è una relazione di *ordine totale* se per ogni $x, y, z \in X$ si ha:

i) $x \leq x$ (proprietà riflessiva);
ii) $x \leq y$ oppure $y \leq x$ (confrontabilità);
iii) Se $x \leq y$ e $y \leq x$ allora $x = y$ (proprietà antisimmetrica);
iv) Se $x \leq y$ e $y \leq z$ allora $x \leq z$ (proprietà transitiva).

2.2. Introduzione assiomatica dei numeri reali. Introduciamo in modo assiomatico i numeri reali come *campo ordinato completo*.

Definizione 2.2. I numeri reali sono un insieme $\mathbb{R}$ munito di due operazioni $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e di una relazione di ordine totale $\leq$ che verificano, per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}$, la seguente lista di assiomi.

Assiomi della somma:

(S1) $x + y = y + x$ (proprietà commutativa);
(S2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (proprietà associativa);
(S3) esiste $0 \in \mathbb{R}$ tale che $x + 0 = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (esiste l'elemento neutro);
(S4) per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste $-x \in \mathbb{R}$ tale che $x + (-x) = 0$ (esiste l'opposto).

Assiomi del prodotto (o moltiplicazione):

(P1) $x \cdot y = y \cdot x$ (proprietà commutativa);
(P2) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (proprietà associativa);
(P3) esiste $1 \in \mathbb{R}$, $1 \neq 0$, tale che $1 \cdot x = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (esiste l'elemento neutro);
(P4) per ogni $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, esiste $x^{-1} \in \mathbb{R}$ tale che $x \cdot x^{-1} = 1$ (esiste il reciproco).

Proprietà distributiva:

(D) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Assiomi dell'ordine:

(O1) se $x \leq y$ allora $x + z \leq y + z$;
(O2) se $x \leq y$ e $z \geq 0$, allora $x \cdot z \leq y \cdot z$.

Assioma di completezza:

(AC) Ogni insieme non vuoto $A \subset \mathbb{R}$ superiormente limitato ha estremo superiore.

Chiariremo l'assioma di completezza fra breve. Gli insiemi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ sono in modo naturale sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. I numeri razionali $\mathbb{Q}$ con le usuali operazioni e relazione d'ordine formano un campo ordinato che verifica tutti gli assiomi precedenti, ad eccezione dell'Assioma di completezza.

Definizione 2.3 (Maggiorante, estremo superiore, massimo). Sia $A \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}$.

i) Un elemento $y \in \mathbb{R}$ è un *maggiorante* di A se $x \leq y$ per ogni $x \in A$.
ii) L'insieme A si dice *superiormente limitato* se ha un maggiorante.

iii) Un elemento $x \in \mathbb{R}$ si dice *estremo superiore* di A se è un maggiorante di A e se $x \leq z$ per ogni altro maggiorante z di A (ovvero x è il minimo dei maggioranti). Se $x \in \mathbb{R}$ è l'estremo superiore di A porremo

$$\sup A = x.$$

iv) Se A non è superioremente limitato porremo

$$\sup A = \infty.$$

La convenzione naturale per l'insieme vuoto è di porre $\sup \emptyset = -\infty$.

v) Un numero $x \in \mathbb{R}$ si dice *massimo* di A se $x = \sup A$ ed $x \in A$. Scriveremo in questo caso

$$\max A = x.$$

L'estremo superiore e il massimo, se esistono, sono unici. La definizione di estremo superiore può essere riformulata nei seguenti termini. Un numero $x \in \mathbb{R}$ è l'estremo superiore di un insieme $A \subset \mathbb{R}$ se e solo se:

i) $y \leq x$ per ogni $y \in A$;
ii) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $y \in A$ tale che $y > x - \varepsilon$.

Definizione 2.4 (Minorante, estremo inferiore, minimo). Sia $A \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}$.

i) Un elemento $y \in \mathbb{R}$ è un *minorante* di A se $y \leq x$ per ogni $x \in A$.
ii) L'insieme A si dice *inferiormente limitato* se ha un minorante.
iii) Un elemento $x \in \mathbb{R}$ si dice *estremo inferiore* di A se è un minorante di A e se $z \leq x$ per ogni altro minorante z di A (ovvero x è il massimo dei minoranti). Se $x \in \mathbb{R}$ è l'estremo inferiore di A porremo

$$\inf A = x.$$

iv) Se A non è inferiormente limitato porremo

$$\inf A = -\infty.$$

La convenzione naturale per l'insieme vuoto è di porre $\inf \emptyset = \infty$.

v) Un numero $x \in \mathbb{R}$ si dice *minimo* di A se $x = \inf A$ ed $x \in A$. Scriveremo in questo caso

$$\min A = x.$$

Un numero $x \in \mathbb{R}$ è l'estremo inferiore di un insieme $A \subset \mathbb{R}$ se e solo se:

i) $y \geq x$ per ogni $y \in A$;
ii) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $y \in A$ tale che $y < x + \varepsilon$.

2.3. Conseguenze della completezza.

Proposizione 2.5 (Proprietà di Archimede). Per ogni coppia di numeri reali $x, y \in \mathbb{R}$, $x, y > 0$, esiste un numero naturale $n \in \mathbb{N}$ tale che $nx > y$.

Dim. Supponiamo per assurdo che esistano numeri reali $x, y \in \mathbb{R}$ con $x, y > 0$ tali che $nx \leq y$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora l'insieme

$$A = \big\{nx \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\big\}$$

è superioremente limitato, in quanto y ne è un maggiorante. Per l'Assioma di completezza esiste l'estremo superiore $\bar{x} = \sup A$. Il numero $\bar{x} \in \mathbb{R}$ è caratterizzato dalle seguenti due proprietà:

1) $nx \leq \bar{x}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, ovvero $\bar{x}$ è un maggiorante di A;
2) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $nx > \bar{x} - \varepsilon$, ovvero $\bar{x}$ è il minimo dei maggioranti.

Scegliamo $\varepsilon = x > 0$ nella proprietà 2) e sia $n \in \mathbb{N}$ il corripondente numero naturale, ovvero $nx > \bar{x} - x$. Allora da 1) e 2) si ottiene:

$$\bar{x} \geq (n+1)x = nx + x > \bar{x} - x + x = \bar{x},$$

che è una contraddizione. □

Definizione 2.6 (Parte intera e frazionaria). Sia $x \in \mathbb{R}$ un numero reale e si consideri l'insieme

$$A_x = \big\{p \in \mathbb{Z} : p \leq x\big\}.$$

A_x è un insieme di numeri interi superiormente limitato che ha dunque estremo superiore. Poichè A_x è un sottoinsieme di $\mathbb{Z}$ questo estremo superiore è un massimo. Definiamo la *parte intera di x*

$$[x] = \max\big\{p \in \mathbb{Z} : p \leq x\big\} \in \mathbb{Z}.$$

Il numero $[x] \in \mathbb{Z}$ è il più grande intero minore o uguale ad x. La *parte frazionaria di x* è il numero $\{x\} = x - [x]$.

Parte intera e parte frazionaria verificano le seguenti disuguaglianze:

$$[x] \leq x < [x] + 1, \quad 0 \leq \{x\} < 1.$$

Proviamo ora che i numeri razionali $\mathbb{Q}$ sono densi in $\mathbb{R}$.

Proposizione 2.7 (Densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$). Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, esiste $q \in \mathbb{Q}$ tale che $x < q < y$.

Dim. [1] Siccome $y - x > 0$, per la proprietà di Archimede esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $n(y - x) > 1$, ovvero $ny - nx > 1$. Segue che

$$nx < ny - 1 < [ny] \leq ny.$$

Il numero $\bar{q} = [ny]/n \in \mathbb{Q}$ verifica dunque $x < \bar{q} \leq y$. Per avere una disuguaglianza stretta anche a destra argomentiamo nel seguente modo. Esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $m(\bar{q} - x) > 1$ e quindi

$$x < \bar{q} - \frac{1}{m} < \bar{q} \leq y.$$

Il numero $q = \bar{q} - \frac{1}{m} \in \mathbb{Q}$ verifica quindi la tesi.

□

[1]Dimostrazione omessa.

3. $\mathbb{R}$ come spazio metrico

La funzione *modulo* o *valore assoluto* su $\mathbb{R}$ è la funzione $|\cdot|:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita, per ogni $x\in\mathbb{R}$, nel seguente modo

$$|x| = \max\{x,-x\} = \begin{cases} x & \text{se } x\geq 0; \\ -x & \text{se } x\leq 0. \end{cases}$$

Valgono le disuguaglianze elementari $x\leq |x|$ e $-x\leq |x|$, ed inoltre:

i) $|x|\geq 0$ per ogni $x\in\mathbb{R}$ e $|x|=0$ se e solo se $x=0$;
ii) $|x|=|-x|$;
iii) $|x+y|\leq |x|+|y|$ per ogni $x,y\in\mathbb{R}$ (subadittività).

La verifica di iii) segue dalle disuguaglianze

$$x+y\leq |x|+|y| \quad \text{e} \quad -(x+y) = -x-y\leq |x|+|y|.$$

Una conseguenza di iii) è la *disuguaglianza triangolare*

$$|x-y|\leq |x-z|+|z-y| \quad \text{per ogni } x,y,z\in\mathbb{R}.$$

Infatti, $|x-y| = |x-z+z-y|\leq |x-z|+|z-y|$. Dalla iii) segue anche $|x| = |x-y+y|\leq |x-y|+|y|$ che riordinata fornisce $|x|-|y|\leq |x-y|$. Siccome i ruoli di x,y si possono scambiare, si ottiene la disuguaglianza

$$\big||x|-|y|\big|\leq |x-y|.$$

Definiamo la *funzione distanza* $d:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to[0,\infty)$, $d(x,y)=|x-y|$. Questa funzione verifica le seguenti proprietà:

i) $d(x,y)\geq 0$ per ogni $x,y\in\mathbb{R}$ e $d(x,y)=0$ se e solo se $x=y$;
ii) $d(x,y)=d(y,x)$ per ogni $x,y\in\mathbb{R}$;
iii) $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$ per ogni $x,y,z\in\mathbb{R}$ (disuguaglianza triangolare).

La coppia $(\mathbb{R},d)$ è allora uno *spazio metrico*. La funzione $d(x,y)=|x-y|$ si dice distanza standard o Euclidea su $\mathbb{R}$.

4. Esercizi

Esercizio 4.1. Sia $A\subset\mathbb{R}$ il seguente insieme

$$A := \Big\{\frac{xy}{x+y}\in\mathbb{R} : 0<x,y<1\Big\}.$$

1) Calcolare $\sup A$ e dire se esiste $\max A$.
2) Calcolare $\inf A$ e dire se esiste $\min A$.

Esercizio 4.2. Sia $A\subset\mathbb{R}$ il seguente insieme

$$A := \Big\{n-\sqrt{n^2-1}\in\mathbb{R} : n\in\mathbb{N},\, n\geq 1\Big\}.$$

1) Calcolare $\sup A$ e dire se esiste $\max A$.
2) Calcolare $\inf A$ e dire se esiste $\min A$.

Esercizio 4.3. Sia $A\subset\mathbb{R}$ il seguente insieme

$$A := \Big\{\frac{n\log(1/n)}{n+1}\in\mathbb{R} : n\in\mathbb{N},\, n\geq 1\Big\}.$$

Provare che $\inf A = -\infty$.

CHAPTER 2

Numeri complessi

1. Introduzione

Introduciamo il simbolo $i = \sqrt{-1}$ che ubbidisce alla regola $i^2 = -1$. Il numero i si chiama *unità immaginaria*. I numeri complessi sono l'insieme

$$\mathbb{C} = \left\{ z = x + iy \, : \, x, y \in \mathbb{R} \right\},$$

ovvero l'insieme di tutte le "espressioni" della forma $x + iy$ dove x e y sono numeri reali. Il numero complesso $z = x + iy$ può essere identificato con il punto del piano Cartesiano $\mathbb{R}^2$ di coordinate (x, y) (Figura 1).

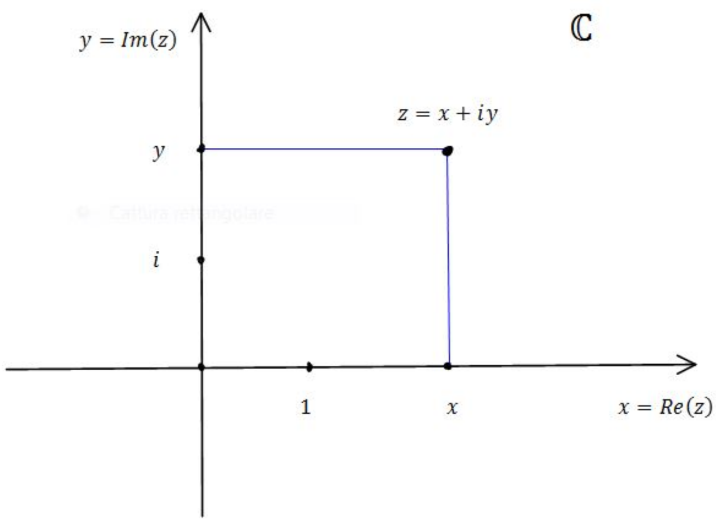

FIGURE 1

Definiamo la *parte reale* e la *parte immaginaria* del numero complesso $z = x + iy$:

$$\begin{aligned} x &= \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(x + iy) \quad \text{Parte reale di } z \\ y &= \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(x + iy) \quad \text{Parte immaginaria di } z. \end{aligned}$$

Le parti reale e immaginaria di un numero complesso sono numeri reali.

2. Operazioni sui numeri complessi

Introduciamo le operazioni di somma, prodotto e reciproco di numeri complessi.

2.1. Somma. Dati due numeri complessi $z = x+iy$ e $w = \xi+i\eta$ in $\mathbb{C}$, definiamo la loro somma:

$$z + w = (x + iy) + (\xi + i\eta) = (x + \xi) + i(y + \eta).$$

Nel piano complesso, la somma è semplicemente la somma vettoriale.

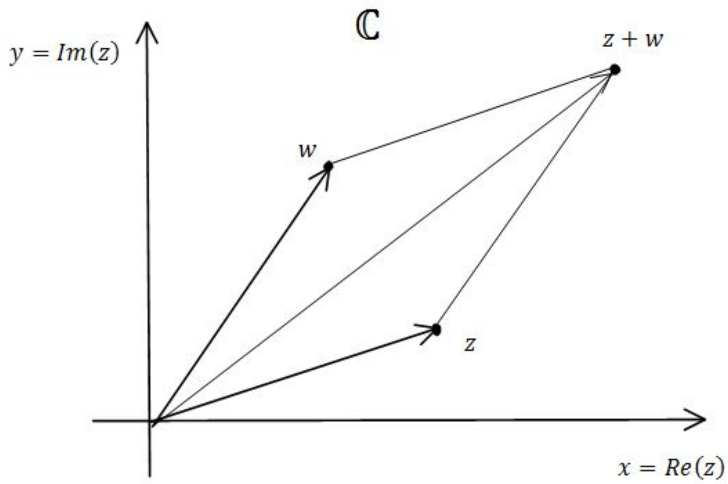

Figure 2

2.2. Prodotto. Dati due numeri complessi $z = x+iy$ e $w = \xi+i\eta$ in $\mathbb{C}$, definiamo il loro prodotto:

$$z \cdot w = (x + iy) \cdot (\xi + i\eta) = x\xi + ix\eta + iy\xi + i^2 y\eta = (x\xi - y\eta) + i(x\eta + y\xi).$$

Abbiamo usato la regola $i^2 = -1$. Vedremo in seguito l'interpretazione geometrica del prodotto di numeri complessi. Il simbolo $\cdot$ per indicare il prodotto viene spesso omesso.

2.3. Reciproco e quoziente. Calcoliamo formalmente il reciproco di un numero complesso $z \neq 0$:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{1}{x + iy} \cdot \frac{x - iy}{x - iy} = \frac{x - iy}{x^2 - i^2 y^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Usiamo questo calcolo formale per *definire* il reciproco di $z = x + iy \neq 0$ nel seguente modo

$$\frac{1}{z} := \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Con un calcolo che ripercorre a ritroso il precedente si verifica ora che per ogni $z \in \mathbb{C}$ con $z \neq 0$ si ha

$$z \cdot \frac{1}{z} = 1.$$

Definito il reciproco di un numero complesso, è immediato definire anche il quoziente fra due numeri complessi $z, w \in \mathbb{C}$ con $w \neq 0$:

$$\frac{z}{w} = z \cdot \frac{1}{w}.$$

2.4. Campo dei numeri complessi. L'operazione di somma verifica gli assiomi (S1)-(S4). L'operazione di prodotto verifica gli assiomi (P1)-(P4). Inoltre somma e prodotto sono legati dalla proprietà distributiva:

$$z \cdot (w + \zeta) = z \cdot w + z \cdot \zeta, \quad z, w, \zeta \in \mathbb{C}.$$

Questi fatti si riassumono dicendo che $\mathbb{C}$ è un *campo*.

Osservazione importante. Nel campo complesso $\mathbb{C}$ non c'è alcuna relazione d'ordine $\leq$. Dunque, scrivere

$$z \leq w \quad \text{con } z, w \in \mathbb{C} \quad \text{NON} \quad \text{ha senso.}$$

3. Coniugato, modulo e argomento

3.1. Coniugato. Definiamo il *coniugato* del numero complesso $z = x + iy$ come il numero complesso

$$\bar{z} = x - iy.$$

Chiaramente, nel piano complesso $\bar{z}$ è il punto simmetrico a z rispetto all'asse delle x:

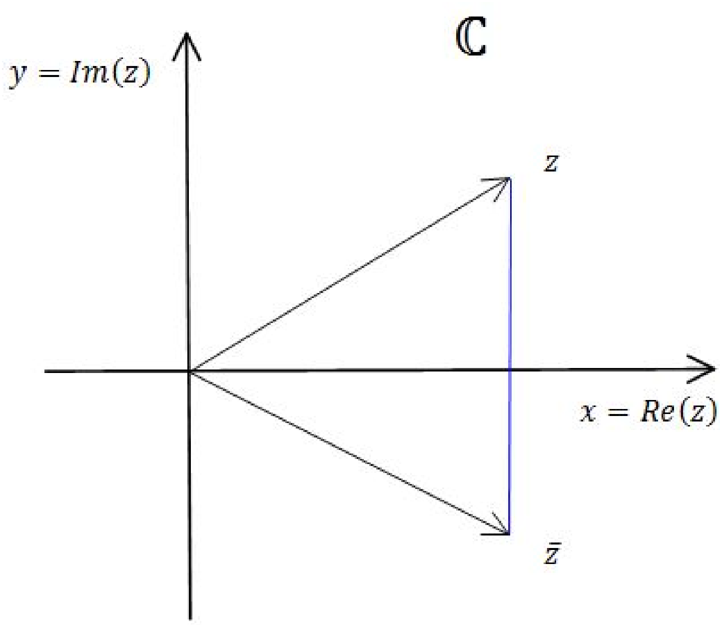

FIGURE 3

L'operazione di coniugazione verifica le proprietà descritte nel seguente teorema, la cui dimostrazione è elementare e viene omessa.

PROPOSIZIONE 3.1. Dati numeri complessi $z, w \in \mathbb{C}$, si ha:

1) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$;
2) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$;
3) $\bar{\bar{z}} = z$;
4) $\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)} = \dfrac{\bar{z}}{\bar{w}}$.

La dimostrazione è elementare e viene omessa. Sono anche utili le seguenti formule per le parti reale e immaginaria di $z = x + iy$:

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

3.2. Modulo. Il modulo del numero complesso $z = x + iy$ è

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{(x + iy)(x - iy)} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Il modulo è sempre un numero reale non negativo. Se $z = x \in \mathbb{R}$ è un numero reale, allora si ha $|z| = \sqrt{x^2} = |x|$ e si trova il valore assoluto di x. Dunque il modulo è l'estensione del valore assoluto.

Per il Teorema di Pitagora, il modulo $|z|$ è la lunghezza del vettore z:

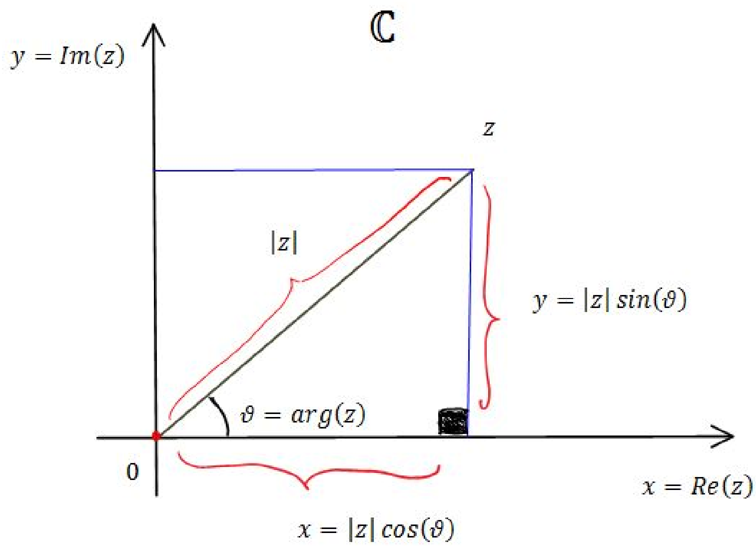

FIGURE 4

3.3. Argomento. Sia $\vartheta \in [0, 2\pi)$ l'angolo formato in senso antiorario dal punto $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, a partire dal semiasse positivo delle x. Definiamo l'*argomento* di z

$$\arg(z) = \vartheta.$$

Dalla trigonometria sappiamo che si hanno le relazioni

$$x = |z| \cos\vartheta \quad \text{e} \quad y = |z| \sin\vartheta.$$

Supponendo $x \neq 0$ e formando il quoziente si trova

$$\mathrm{tg}\vartheta = \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta} = \frac{y}{x}.$$

Quando $x = 0$ allora l'argomento sarà $\pi/2$ quando $y > 0$ e $3\pi/2$ quando $y < 0$. Quando $\vartheta \in [0, \pi/2)$, ovvero quando z è nel primo quadrante, possiamo invertire la relazione precedente e trovare la formula per l'argomento

$$\arg(z) = \vartheta = \mathrm{arctg}\Big(\frac{y}{x}\Big).$$

Esercizio 3.1. Dato $z = x + iy \in \mathbb{C}$, provare che:
1) $\arg(z) = \pi + \mathrm{arctg}\big(y/x\big)$ quando z è nel secondo e terzo quadrante.
2) $\arg(z) = 2\pi + \mathrm{arctg}\big(y/x\big)$ quando z è nel quarto quadrante.

4. Rappresentazione trigonometrica ed esponenziale

4.1. Rappresentazione trigonometrica. Sia $r = |z| \geq 0$ il modulo di $z \in \mathbb{C}$, e sia $\vartheta = \arg(z) \in [0, 2\pi)$ il suo argomento. Allora avremo

$$\begin{aligned} z = x + iy &= r\cos\vartheta + ir\sin\vartheta \\ &= r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta). \end{aligned}$$

Questa è la *rappresentazione trigonometrica* di z.

Usiamo la rappresentazione trigonometrica per interpretare geometricamente il prodotto di numeri complessi. Siano $z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$ e $w = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ con $r, \varrho \geq 0$ e $\vartheta, \varphi \in [0, 2\pi)$. Allora si ha:

$$\begin{aligned} z \cdot w &= r\varrho\big[\cos\vartheta\cos\varphi - \sin\vartheta\sin\varphi + i(\cos\vartheta\sin\varphi + \sin\vartheta\cos\varphi)\big] \\ &= r\varrho\big(\cos(\vartheta + \varphi) + i\sin(\vartheta + \varphi)\big). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Abbiamo usato le formule di addizione per seno e coseno.

Le conclusioni sono interessanti:

1) Il modulo del prodotto è il prodotto dei moduli: $|zw| = |z||w|$;

2) l'argomento del prodotto è la somma degli argomenti: $\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$.

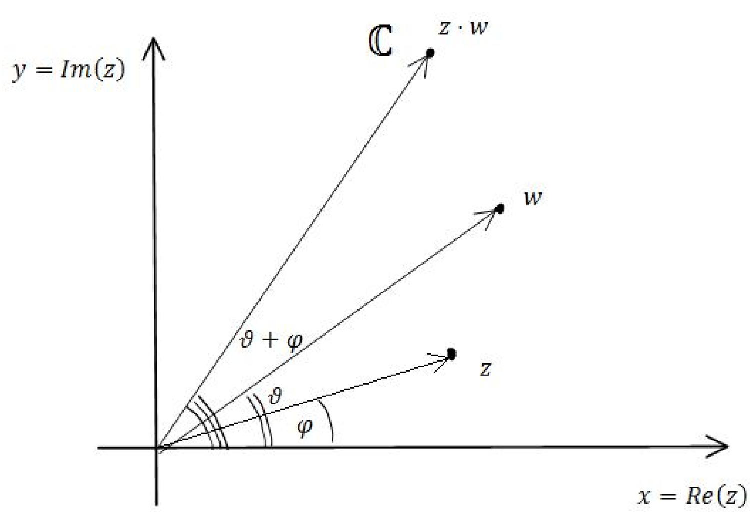

Figure 5

4.2. Rappresentazione esponenziale. Passiamo alla rappresentazione esponenziale di un numero complesso. Poniamo

$$e^{i\vartheta} := \cos\vartheta + i\sin\vartheta. \tag{4.4}$$

Questa formula si chiama *identità di Eulero*. Per il momento la accettiamo come definizione. Alla fine del corso ne daremo anche una dimostrazione basata sugli sviluppi di Taylor.

Proposizione 4.1. L'esponenziale complesso ha le seguenti proprietà:

1) $|e^{i\vartheta}| = 1$ per ogni $\vartheta \in \mathbb{R}$;
2) $e^{i\vartheta} \cdot e^{i\varphi} = e^{i(\vartheta+\varphi)}$ (formula di addizione).
3) $(e^{i\vartheta})^n = e^{in\vartheta}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (formula di de Moivre).

Dim. La 1) segue dalla definizione (4.4). La 2) è una riformulazione di (4.3). La formula 3) segue iterando la 2). □

Un numero complesso $z \in \mathbb{C}$ si può scrivere nel seguente modo

$$z = re^{i\vartheta},$$

dove $r = |z| \geq 0$ è il modulo di z e $\vartheta = \arg(z)$ è il suo argomento. Questa è la *rappresentazione esponenziale* di un numero complesso.

5. Radici di un numero complesso

Sia $w = Re^{i\varphi}$, con $R = |w| \geq 0$ e $\varphi = \arg(w) \in [0, 2\pi)$, un numero complesso fissato e sia $n \in \mathbb{N}$. Vogliamo risolvere l'equazione

$$z^n = w$$

nell'incognita $z \in \mathbb{C}$. In altri termini, vogliamo trovare (tutte) le radici n-esime del numero complesso $w \in \mathbb{C}$. Per il Teorema Fondamentale dell'Algebra, che vedremo fra breve, ci sono esattamente n soluzioni.

Cerchiamo soluzioni in forma esponenziale $z = re^{i\vartheta}$ con $r \geq 0$ e $\vartheta \in [0, 2\pi)$ da determinare. Usando la formula di de Moivre, avremo

$$z^n = (re^{i\vartheta})^n = r^n(e^{i\vartheta})^n = r^n e^{in\vartheta}.$$

L'equazione $z^n = w$ diventa allora

$$r^n e^{in\vartheta} = Re^{i\varphi}.$$

Uguagliando i moduli si ottiene l'equazione

$$r^n = R \quad \Leftrightarrow \quad r = \sqrt[n]{R}.$$

D'altra parte, si ha

$$e^{in\vartheta} = e^{i\varphi} \quad \Leftrightarrow \quad n\vartheta = \varphi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

e quindi si trovano gli argomenti

$$\vartheta_k = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Basta considerare gli indici $k = 0, 1, \ldots, n-1$, perchè gli altri k danno delle ripetizioni. In conclusione, si ottengono n radici distinte

$$z_k = \sqrt[n]{R}\, e^{i\vartheta_k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Le radici si dispongono sui vertici di un poligono regolare di n lati inscritto in una circonferenza centrata in 0 di raggio $\sqrt[n]{R}$.

Esempio 5.1. Vogliamo calcolare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione $z^4 = -1$. In primo luogo si scrive il numero complesso $w = -1$ in forma esponenziale: $R = |w| = 1$ mentre $\varphi = \arg(w) = \pi$. Dunque si ha $-1 = \mathrm{e}^{i\pi}$. Si trovano le quattro radici

$$z_k = \mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k}{2}\pi\right)}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Le soluzioni si dispongono sui vertici di un quadrato:

Disegno

6. Numeri complessi come spazio metrico

Definiamo la distanza fra due numeri complessi $z, w \in \mathbb{C}$ nel seguente modo:

$$d(z, w) = |z - w|.$$

Si tratta della lunghezza del segmento che congiunge z e w:

Disegno

Osserviamo che, con $z = x + iy$ e $w = \xi + i\eta$, si ha

$$\begin{aligned} |z - w| &= |x + iy - (\xi + i\eta)| = |x + iy - \xi - i\eta| \\ &= |(x - \xi) + i(y - \eta)| \\ &= \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}. \end{aligned}$$

La distanza d verifica le seguenti proprietà:

(1) $d(z, w) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |z - w| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z - w = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = w.$
(2) $d(z, w) = |z - w| = |w - z| = d(w, z)$.
(3) $d(z, w) \leq d(z, \zeta) + d(\zeta, w)$ (Disuguaglianza triangolare).

La verifica della disuguaglianza triangolare è omessa.

Esempio 6.1. Fissati un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ ed un numero reale $r \geq 0$, l'insieme

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r \right\}$$

è la circonferenza di raggio r e centro z_0.

Esempio 6.2. Fissati un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ ed un numero reale $r \geq 0$, l'insieme

$$B = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r \right\}$$

è tutto il cerchio (bordo incluso).

Disegno

Esempio 6.3. L'insieme

$$E = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - i| + |z + i| = 4 \right\}$$

è un'ellisse di fuochi i e $-i$.

7. Polinomi complessi

DEFINIZIONE 7.1. Siano $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ numeri complessi. Un'espressione della forma

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

si dice *polinomio complesso* della variabile $z \in \mathbb{C}$. Se $a_n \neq 0$ diremo che $P(z)$ ha grado $n \in \mathbb{N}$.

Un numero complesso $z_0 \in \mathbb{C}$ si dice *radice* di un polinomio complesso $P(z)$ se $P(z_0) = 0$, ovvero se $P(z)$ calcolato in $z = z_0$ si annulla. Il vantaggio di lavorare con polinomi complessi è che hanno sempre un numero di radici pari al grado del polinomio.

TEOREMA 7.2 (Fondamentale dell'Algebra). Sia $P(z)$ un polinomio complesso di grado $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Allora l'equazione

$$P(z) = 0$$

ha esattamente n soluzioni (contate con la loro molteplicità), dette radici del polinomio.

La dimostrazione del Teorema è fuori dalla nostra portata ed è omessa.

ESEMPIO 7.3. Il polinomio $P(x) = 1 + x^2$ della variabile reale $x \in \mathbb{R}$ non ha radici reali. Il polinomio complesso $P(z) = 1 + z^2$ ha invece esattamente due radici in campo complesso che sono $z = \pm i$.

OSSERVAZIONE 7.4. Sia $P(z)$ un polinomio complesso di grado $n \geq 1$ con $a_n = 1$. Siano $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ le sue radici. Allora il polinomio può essere fattorizzato nel seguente modo

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2) \cdot \ldots \cdot (z - z_n).$$

OSSERVAZIONE 7.5. Supponiamo che il polinomio complesso

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

abbia coefficienti reali: $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Allora

$$P(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P(\bar{z}) = 0.$$

Dunque, nota una radice $z \in \mathbb{C}$ se ne conosce automaticamente una seconda $\bar{z} \in \mathbb{C}$.

DIM. Osserviamo preliminarmente che

$$P(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{P(z)} = 0.$$

Inoltre, si ha

$$\overline{P(z)} = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k z^k} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k z^k} = \sum_{k=0}^{n} \bar{a}_k \overline{z^k} = \sum_{k=0}^{n} a_k \bar{z}^k = P(\bar{z}).$$

Abbiamo usato il fatto che i coefficienti sono reali: $\bar{a}_k = a_k$. L'affermazione segue. $\square$

8. Esercizi svolti sui numeri complessi

Esercizio 8.1. Calcolare le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$z^3 = 8i.$$

Ovvero: calcolare le radici terze di $8i$

Soluzione. Scriviamo $8i$ in forma esponenziale:

$$\begin{array}{ll} R = |8i| = 8 & \text{modulo} \\ \varphi = \arg(8i) = \frac{\pi}{2} & \text{argomento.} \end{array}$$

Disegno

Cerchiamo soluzioni della forma $z = re^{i\vartheta}$ con $r \geq 0$ e $\vartheta \in [0, 2\pi)$ da determinare. Abbiamo l'equazione

$$8i = 8e^{i\frac{\pi}{2}} = z^3 = r^3 e^{3i\vartheta}.$$

Otteniamo

$$r^3 = 8 \quad \Leftrightarrow \quad r = 2.$$

E poi

$$3\vartheta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k = 0, 1, 2,$$

ovvero

$$\vartheta_k = \frac{\pi}{6} + \frac{2k}{3}\pi, \quad k = 0, 1, 2.$$

Precisamente: $\vartheta_0 = \pi/6$, $\vartheta_1 = \frac{5}{6}\pi$, $\vartheta_2 = \frac{3}{2}\pi$. Le soluzioni in forma algebrica sono:

$$\begin{aligned} z_0 &= 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2\Big(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\Big) = 2\Big(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\Big) = \sqrt{3} + i, \\ z_1 &= 2e^{i\frac{5}{6}\pi} = 2\Big(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi\Big) = 2\Big(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\Big) = -\sqrt{3} + i, \\ z_2 &= 2e^{i\frac{3}{2}\pi} = 2\Big(\cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi\Big) = -2i. \end{aligned}$$

Nel piano di Gauss:

Disegno

Esercizio 8.2. Calcolare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$z^4 - 2i\sqrt{3}z^2 - 4 = 0$$

e rappresentarle nel piano di Gauss.

Soluzione. Ponendo $w = z^2$ l'equazione diviene

$$w^2 - 2i\sqrt{3}w - 4 = 0.$$

Usiamo la formula risolutiva per le equazioni di secondo grado:

$$\begin{aligned} w_\pm &= \frac{2i\sqrt{3} \pm \sqrt{4i^2 \cdot 3 + 16}}{2} \\ &= \frac{2i\sqrt{3} \pm 2}{2} = \pm 1 + i\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Dobbiamo risolvere le due equazioni

$$z^2 = w_+ = 1 + i\sqrt{3}$$
$$z^2 = w_- = -1 + i\sqrt{3}.$$

Risolviamo la prima equazione. Scriviamo w_- in forma esponenziale. Modulo e argomento sono (osserviamo che w_+ è nel primo quadrante):

$$R = |w_1| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$
$$\varphi = \arg(w_+) = \operatorname{arctg}\Big(\frac{\sqrt{3}}{1}\Big) = \operatorname{arctg}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}.$$

Dunque, si ha

$$w_+ = 2\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}} = 2\Big(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\Big).$$

Otteniamo l'equazione per l'incognita $z = r\mathrm{e}^{i\vartheta}$, con $r \geq 0$ e $\vartheta \in [0, 2\pi)$:

$$r^2\mathrm{e}^{i2\vartheta} = z^2 = w_+ = 2\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}.$$

Si ottengono le due equazioni:

$$r^2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad r = \sqrt{2}$$
$$2\vartheta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k = 0, 1.$$

Gli argomenti sono

$$\vartheta_0 = \frac{\pi}{6} \quad \text{e} \quad \vartheta_1 = \frac{7}{6}\pi.$$

Si trovano le prime due soluzioni in forma algebrica:

$$z_0 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{i\vartheta_0} = \sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$$
$$z_1 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{i\vartheta_1} = -\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

In modo analogo si risolve l'equazione $z^2 = w_- = -1 + i\sqrt{3}$. Si trovano le soluzioni:

$$z_2 = \sqrt{2}\Big(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)$$
$$z_3 = \sqrt{2}\Big(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big).$$

Esercizio 8.3. Calcolare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$z^3 = 9\bar{z}.$$

Soluzioni. Certamente $z = 0$ è una soluzione. Cerchiamo soluzioni in forma esponenziale $z = r\mathrm{e}^{i\vartheta}$ con $r \geq 0$ e $\vartheta \in [0, 2\pi)$. Osserviamo che

$$\begin{aligned}\bar{z} &= \overline{r\mathrm{e}^{i\vartheta}} = r\overline{\mathrm{e}^{i\vartheta}}\\ &= r\big(\overline{\cos\vartheta + i\sin\vartheta}\big) = r(\cos\vartheta - i\sin\vartheta)\\ &= r\big(\cos(-\vartheta) + i\sin(-\vartheta)\big) = r\mathrm{e}^{-i\vartheta}.\end{aligned}$$

Dunque, si trova l'equazione

$$z^3 = 9\bar{z} \quad \Leftrightarrow \quad r^3 \mathrm{e}^{3i\vartheta} = 9r\mathrm{e}^{-i\vartheta},$$

e deduciamo che

$$r^3 = 9r \quad \Leftrightarrow \quad r = 0 \quad \text{oppure} \quad r = 3,$$

e poi

$$3\vartheta = -\vartheta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

ovvero

$$\vartheta_k = \frac{k}{2}\pi, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Troviamo le soluzioni

$$z_1 = 3\mathrm{e}^{i\cdot 0} = 3, \quad z_2 = 3\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}} = 3i, \quad z_3 = 3\mathrm{e}^{i\pi} = -3, \quad z_4 = 3\mathrm{e}^{i\frac{3}{2}\pi} = -3i,$$

cui va aggiunta la soluzione $z_0 = 0$.

Esercizio 8.4. Calcolare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$z^3\bar{z} + 3z^2 - 4 = 0.$$

Soluzione. Riscriviamo l'equazione in questo modo

$$z^2(z\bar{z} + 3) = 4 \quad \Leftrightarrow \quad z^2(|z|^2 + 3) = 4. \tag{8.5}$$

Eguagliamo i moduli a destra e sinistra

$$|z^2|(|z|^2 + 3) = |z^2(|z|^2 + 3)| = |4| = 4,$$

e osserviamo che $|z^2| = |z|^2$. Si ottiene dunque l'equazione per l'incognita $t = |z|^2 \geq 0$

$$t^2 + 3t - 4 = 0.$$

Le soluzioni sono $t = -4$, che è da scartare, e $t = 1$, che è accettabile. Dunque, deve essere $|z|^2 = 1$ e quindi $|z| = 1$. e sostituendo tale valore nell'equazione (8.5) si ottiene $z^2 = 1$ che ha le soluzioni $z = \pm 1$. Queste sono tutte e sole le soluzioni dell'equazione.

Esercizio 8.5. Disegnare nel piano di Gauss l'insieme dei numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(iz^2 - i\bar{z}^2) \geq -4 \\ \left| z - \dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\sqrt{2} \right| \leq \sqrt{2}. \end{cases}$$

Soluzione. L'insieme

$$C = \left\{ z \in \mathbb{C} \, : \, \left| z - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\sqrt{2} \right) \right| \leq \sqrt{2} \right\}$$

è un cerchio di centro $z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\sqrt{2}$ e raggio $r = \sqrt{2}$ (circonferenza inclusa).

Studiamo la prima disequazione. Poniamo $z = x + iy$:

$$\begin{aligned} iz^2 - i\bar{z}^2 &= i(x + iy)^2 - i(x - iy)^2 \\ &= i(x^2 + 2ixy - y^2) - i(x^2 - 2ixy - y^2) \\ &= -2xy - 2xy + i(x^2 - x^2 - y^2 + y^2) = -4xy. \end{aligned}$$

Dunque, si ha

$$\mathrm{Re}(iz^2 - i\bar{z}^2) \geq -4 \quad \Leftrightarrow \quad -4xy \geq -4 \quad \Leftrightarrow \quad xy \leq 1.$$

L'insieme

$$A = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \, : \, xy \leq 1\}$$

è la regione del piano delimitata dai due rami di iperbole $xy = 1$ (iperbole inclusa). In conclusione, le soluzioni sono date dall'intersezione $A \cap C$:

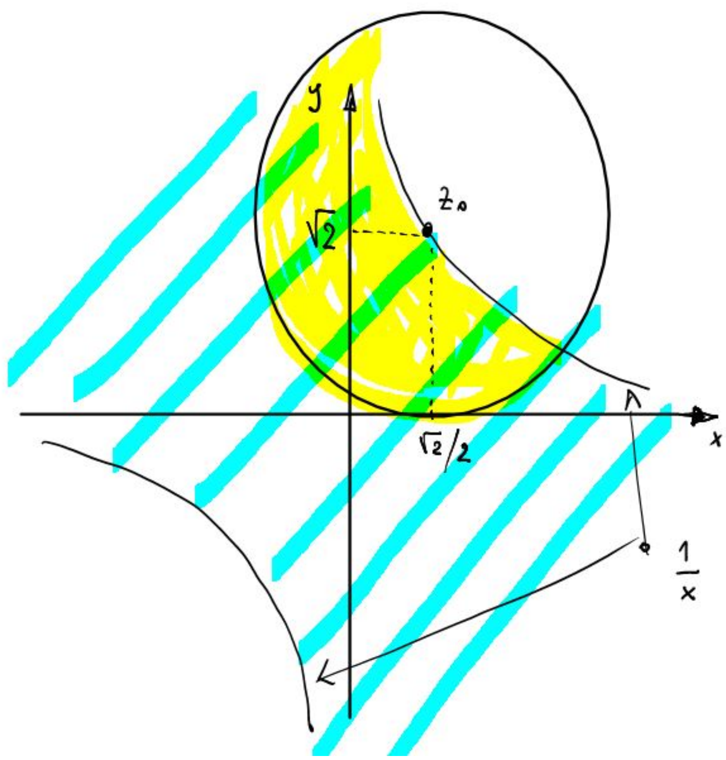

FIGURE 6

ESERCIZIO 8.6. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ un parametro fissato. Disegnare nel piano complesso il seguente insieme

$$S_\alpha = \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{\bar{z} + 1 - i\alpha}{z + 1} \in \mathbb{R} \right\}$$

Soluzione. In primo luogo deve essere $z + 1 \neq 0$, ovvero:

$$z \neq -1.$$

L'insieme S_α è formato dai punti $z \neq -1$ tali che

$$\mathrm{Im}\Big(\frac{\bar{z} + 1 - i\alpha}{z + 1} \Big) = 0.$$

Calcoliamo il quoziente, ponendo $z = x + iy$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\bar{z} + 1 - i\alpha}{z + 1} &= \frac{\bar{z} + 1 - i\alpha}{z + 1} \frac{\bar{z} + 1}{\bar{z} + 1} \\
&= \frac{\bar{z}^2 + \bar{z} + \bar{z} + 1 - i\alpha\bar{z} - i\alpha}{|z|^2 + z + \bar{z} + 1} \\
&= \frac{(x - iy)^2 + 2(x - iy) + 1 - i\alpha(x - iy) - i\alpha}{x^2 + y^2 + 2x + 1} \\
&= \frac{x^2 - 2ixy - y^2 + 2x - 2iy + 1 - i\alpha x - \alpha y - i\alpha}{x^2 + y^2 + 2x + 1}.
\end{aligned}
$$

Annulliamo la parte immaginaria:

$$
\begin{aligned}
-2xy - 2y - \alpha x - \alpha = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 2y(x + 1) + \alpha(x + 1) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (x + 1)(2y + \alpha) = 0.
\end{aligned}
$$

Quindi deve essere $x + 1 = 0$ oppure $2y + \alpha = 0$. Nel primo caso si ha la retta $x = -1$ (ma il punto $z = -1$ è escluso).

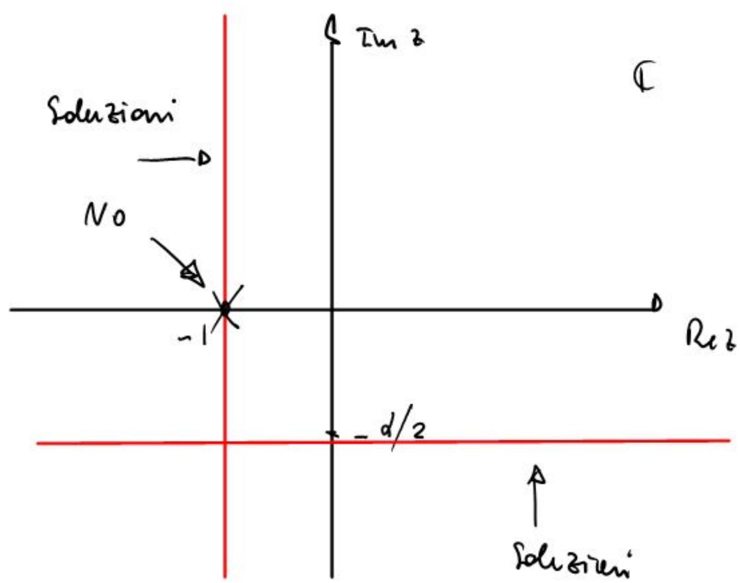

Figure 7

Nel secondo caso si ha la retta $y = -\frac{\alpha}{2}$.

Esercizio 8.7. Determinare $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che $z_0 = i$ sia radice del polinomio

$$P(z) = z^4 - 2z^3 + \lambda z^2 - 2z + 2.$$

Calcolare quindi tutte le radici.

Soluzione. Il numero complesso $z_0 = i$ è radice del polinomio se

$$0 = P(i) = i^4 - 2i^3 + \lambda i^2 - 2i + 2 = 3 - \lambda.$$

Quindi $\lambda = 3$. Il polinomio è

$$P(z) = z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 2.$$

Osserviamo che i coefficienti del polinomio sono reali. Due radici del polinomio sono dunque $z_0 = i$ e $\bar{z}_0 = -i$. Le altre due radici sono $z_1 \in \mathbb{C}$ e $\bar{z}_1 \in \mathbb{C}$, da determinare. Il polinomio si fattorizza nel seguente modo:

$$\begin{aligned} P(z) &= (z-i)(z+i)(z-z_1)(z-\bar{z}_1) \\ &= (z^2+1)(z^2 - z\bar{z}_1 - z_1 z + |z_1|^2) \\ &= z^4 - (z_1+\bar{z}_1)z^3 + (1+|z_1|^2)z^2 - (z_1+\bar{z}_1)z + |z_1|^2. \end{aligned}$$

Eguagliando i coefficienti del polinomio si ottiene il sistema di equazioni nell'incognita z_1:

$$\begin{cases} -2 = -(z_1+\bar{z}_1) \\ 3 = |z_1|^2 + 1 \\ -2 = -(z_1+\bar{z}_1) \\ 2 = |z_1|^2. \end{cases}$$

Le ultime due equazioni sono doppioni delle prime due. Dunue si ha il sistema

$$\begin{cases} z_1 + \bar{z}_1 = 2 \\ |z_1|^2 = 2 \end{cases}$$

Se $z_1 = x_1 + iy_1$, la prima equazione fornisce $x_1 = 1$ e quindi la seconda diventa

$$2 = |z_1|^2 = x_1^2 + y_1^2 = 1 + y_1^2,$$

da cui si deduce che $y_1^2 = 1$, ovvero $y_1 = \pm 1$. Scegliendo il segno $+$ si trova la coppia di soluzioni

$$z_1 = 1 + i, \quad \bar{z}_1 = 1 - i.$$

Scegliendo il segno $-$ si trovano le stesse soluzioni, scambiate fra loro.

In conclusione, le quattro soluzioni sono $\pm i$ e $1 \pm i$.

Esercizio 8.8. Disegnare nel piano complesso l'insieme delle $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\frac{\sqrt{4-|z-4|}}{\sqrt{4-|z+4i|}} > 1. \tag{8.6}$$

Soluzione. Abbiamo le restrizioni:

$$4 - |z-4| \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad |z-4| \leq 4, \tag{8.7}$$

$$4 - |z+4i| > 0 \quad \Leftrightarrow \quad |z+4i| < 4. \tag{8.8}$$

Rappresentiamo il dominio di esistenza nel seguente disegno:

Disegno

Con tali restrizioni, possiamo elevare al quadrato la disuguaglianza (8.6) e ottenere

$$\begin{aligned} \frac{4-|z-4|}{4-|z+4i|} > 1 \quad &\Leftrightarrow \quad 4-|z-4| > 4-|z+4i| \\ &\Leftrightarrow \quad |z+4i| > |z-4| \\ &\Leftrightarrow \quad |z+4i|^2 > |z-4|^2. \end{aligned}$$

Ponendo $z = x + iy$ si ottiene la disuguaglianza equivalente:

$$\begin{aligned} |x+iy+4i|^2 > |x+iy-4|^2 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 + (y+4)^2 > (x-4)^2 + y^2 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 + 8y + 16 > x^2 - 8x + 16 + y^2, \end{aligned}$$

ovvero $y > -x$:

Disegno

In definitiva, le soluzioni sono:

Disegno

CHAPTER 3

Successioni numeriche

1. Successioni numeriche convergenti e divergenti

Una *successione reale* è una funzione $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Indicheremo con $a_n = a(n) \in \mathbb{R}$ l'*elemento n-esimo* della successione. La successione si indica con il simbolo $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La successione si può anche definire elencando in modo ordinato i suoi elementi. Ad esempio, la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n = \frac{n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, è formata dagli elementi

$$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots .$$

Definizione 1.1 (Successioni convergenti). Diciamo che una successione reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge ad un limite* $L \in \mathbb{R}$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$|a_n - L| < \varepsilon \quad \text{per ogni } n \geq \bar{n}.$$

Diremo in questo caso che la successione è *convergente* e scriveremo anche

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n \quad \text{oppure} \quad a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L.$$

Il numero L si dice *limite della successione.*

Esempio 1.2. Verifichiamo ad esempio che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$ e cerchiamo $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per $n \geq \bar{n}$ si abbia

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n+1} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

Quindi è sufficiente scegliere un numero naturale $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\bar{n} > \frac{1}{\varepsilon} - 1$. Un tale numero esiste per la Proprietà di Archimede dei numeri reali.

Proposizione 1.3 (Unicità del limite). Se una successione reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha limite $L \in \mathbb{R}$ allora questo limite è unico.

Dim. Siano L ed M entrambi limiti della successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Fissato $\varepsilon > 0$ a piacere, esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n - L| < \varepsilon$ e $|a_n - M| < \varepsilon$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Dalla disuguaglianza triangolare segue che

$$|L - M| = |L - a_n + a_n - M| \leq |L - a_n| + |a_n - M| < 2\varepsilon.$$

Siccome $\varepsilon > 0$ è arbitrario, questo implica che $|L - M| = 0$ e quindi $L = M$. $\square$

Definizione 1.4. Diremo che una successione reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a ∞ ("più infinito") se per ogni $M \in \mathbb{R}$ (arbitrariariamente grande) esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$a_n \geq M \quad \text{per ogni } n \geq \bar{n}.$$

Scriveremo in questo caso $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Analogamente, diremo che una successione reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a $-\infty$ ("meno infinito") se per ogni $M \in \mathbb{R}$ (arbitrariariamente grande) esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$a_n \leq -M \quad \text{per ogni } n \geq \bar{n}.$$

Scriveremo in questo caso $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Delle successioni reali che non cadono nè nel caso della Definizione 1.1 (successione convergente) nè nei casi della Definizione 1.4 diremo che *non hanno limite*, nè finito nè $\pm\infty$.

Una successione reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si dice *limitata* se l'insieme $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ è limitato in $\mathbb{R}$. Equivalentemente, la successione è limitata se esiste $C > 0$ tale che

$$|a_n| \leq C < \infty \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Proposizione 1.5. Se una successione reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente allora è limitata.

Dim. Sia $L \in \mathbb{R}$ il limite della successione. Fissiamo a nostro piacere un $\varepsilon > 0$. Allora esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n - L| < \varepsilon$ per ogni $n > \bar{n}$. Scegliamo

$$C = \max\{|a_1|, \ldots, |a_{\bar{n}}|, |L| + \varepsilon\}.$$

Allora $|a_n| \leq C$ per ogni $n = 1, \ldots, \bar{n}$, elementarmente. Inoltre, per $n > \bar{n}$ si ha

$$|a_n| = |a_n - L + L| \leq |a_n - L| + |L| < \varepsilon + |L| \leq C.$$

□

Teorema 1.6 (Proprietà generali dei limiti). Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni in $\mathbb{R}$ convergenti. Allora:

1) La successione somma $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente e inoltre
$$\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n.$$
2) La successione prodotto $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente e inoltre
$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n.$$
3) Se $b_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e il limite di $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non è 0, allora la successione quoziente $(a_n/b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge e inoltre
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

Dim. Indichiamo con $L, M \in \mathbb{R}$ i limiti delle successioni $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e sia $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n - L| < \varepsilon$ e $|b_n - M| < \varepsilon$ per ogni $n \geq \bar{n}$.

1) Allora si ha per ogni $n \geq \bar{n}$:

$$|a_n + b_n - (L + M)| \leq |a_n - L| + |b_n - M| < 2\varepsilon.$$

2) Per la Proposizione 1.5, esiste $C > 0$ tale che $|a_n| \leq C$ e $|b_n| \leq C$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora si ha per ogni $n \geq \bar{n}$:

$$|a_n b_n - LM| = |a_n b_n - Lb_n + Lb_n - LM| \leq |b_n||a_n - L| + |L||b_n - M| \leq C\varepsilon + |L|\varepsilon = (C + |L|)\varepsilon.$$

3) Per il punto 2), è sufficiente provare l'affermazione nel caso $a_n = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Siccome $M \neq 0$ per ipotesi, esiste $\widehat{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \widehat{n}$ si ha

$$|b_n| = |b_n - M + M| \geq |M| - |b_n - M| \geq \frac{|M|}{2}.$$

Dunque, per $n \geq \max\{\bar{n}, \widehat{n}\}$ si ha

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{M}\right| = \frac{|b_n - M|}{|b_n||M|} \leq \frac{2\varepsilon}{M^2}.$$

□

Teorema 1.7 (Teorema del confronto). Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni reali tali che esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $n \geq \bar{n}$ si ha

$$a_n \leq b_n \leq c_n.$$

Supponiamo che esistano i limiti $L, M \in \mathbb{R}$ delle successioni $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, rispettivamente. Se $L = M$, allora anche $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge e $\lim_{n\to\infty} b_n = M$.

Dim. Fissato $\varepsilon > 0$ sia $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n - L| < \varepsilon$ e $|c_n - L| < \varepsilon$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Allora si ha anche

$$b_n - L \leq c_n - L \leq |c_n - L| < \varepsilon,$$
$$L - b_n \leq L - a_n \leq |L - a_n| < \varepsilon,$$

e quindi $|b_n - L| < \varepsilon$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ tale che $n \geq \bar{n}$. □

Definizione 1.8. Sia $A(n)$ un'affermazione che riguarda il generico numero naturale $n \in \mathbb{N}$. Se esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $A(n)$ è vera per ogni $n \geq \bar{n}$ diremo che l'affermazione $A(n)$ è vera *definitivamente*.

Il Teorema sulle operazioni coi limiti e il Teorema del confronto coprono solo alcuni dei casi che si possono presentare. Nel seguito discutiamo alcune altre situazioni esemplari.

Proposizione 1.9. Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione infinitesima (ovvero $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$) e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione limitata. Allora la successione prodotto $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è infinitesima.

Dim. Sia $C > 0$ una costante tale che $|b_n| \leq C$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n| \leq \varepsilon$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Allora si ha

$$|a_n b_n| = |a_n||b_n| \leq C\varepsilon, \quad \text{per ogni } n \geq \bar{n}.$$

Questo prova che la successione prodotto è infinitesima. □

Esercizio 1.1. Provare le seguenti affermazioni.

1) Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni reali tali che $a_n \leq b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora si ha

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \infty.$$

2) Siano $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni reali tali che $b_n \leq c_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora si ha
$$\lim_{n\to\infty} c_n = -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} b_n = -\infty.$$
3) Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale che diverge a ∞, e sia $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale limitata. Provare che la successione somma $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a ∞.
4) Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale che diverge a ∞, e sia $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale, positiva, staccata da 0 ovvero: esiste $\delta > 0$ tale che $b_n \geq \delta$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora la successione prodotto $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a ∞.

2. Esempi di successioni elementari

Esempio 2.1 (Quoziente di polinomi). Siano P e Q polinomi a coefficienti reali nella variabile $x \in \mathbb{R}$ di grado p e q, rispettivamente, con $p, q \in \mathbb{N}$. Precisamente, supponiamo di avere
$$P(x) = a_p x^p + \ldots + a_1 x + a_0, \quad x \in \mathbb{R}$$
$$Q(x) = b_q x^q + \ldots + b_1 x + b_0, \quad x \in \mathbb{R}.$$
Avremo $a_p \neq 0$ e $b_q \neq 0$. Senza perdere di generalità supponiamo che $a_p > 0$ e $b_q > 0$. Allora si ha
$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \begin{cases} \infty & \text{se } p > q, \\ \dfrac{a_p}{b_q} & \text{se } p = q, \\ 0 & \text{se } q > p. \end{cases}$$
La verifica è elementare e utilizza il teorema sulle operazioni con i limiti partendo dalla seguente identità:
$$\frac{a_p n^p + \ldots + a_1 n + a_0}{b_q n^q + \ldots + b_1 n + b_0} = n^{p-q} \frac{a_p + a_{p-1} n^{-1} \ldots + a_1 n^{1-p} + a_0 n^{-p}}{b_q + b_{q-1} n^{-1} + \ldots + b_1 n^{1-q} + b_0 n^{-q}}.$$

Esempio 2.2 (Successione geometrica). Sia $q \in \mathbb{R}$ un numero reale fissato. Studiamo la convergenza delle successione geometrica $a_n = q^n$ per $n \in \mathbb{N}$. Verificheremo le seguenti affermazioni:
$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{se } |q| < 1, \\ 1 & \text{se } q = 1, \\ \infty & \text{se } q > 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } q \leq -1. \end{cases}$$
L'ultima affermazione significa che il limite non esiste nè in $\mathbb{R}$ nè $\pm\infty$.

Esaminiamo il caso $-1 < q < 1$. È sufficiente considerare il caso $0 < q < 1$. Allora $q = 1 - x$ con $x \in (0, 1)$. Per tali x valgono le disuguaglianze
$$0 \leq (1 - x)^n \leq \frac{1}{1 + nx}, \quad n \in \mathbb{N}.$$
Si veda l'Esercizio 5 del Foglio 1. Siccome
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + nx} = 0,$$

dal Teorema del confronto segue che

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \lim_{n\to\infty} (1-x)^n = 0.$$

Nel caso $q > 1$ si può scrivere $q = 1 + x$ con $x > 0$. Dalla disuguaglianza di Bernoulli si ottiene

$$q^n = (1+x)^n \geq 1 + nx,$$

e per confronto si trova $\lim_{n\to\infty} q^n = \infty$.

Esempio 2.3 (Radice n-esima). Per ogni numero reale $p > 0$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1.$$

È sufficiente considerare il caso $p > 1$. Il caso $0 < p < 1$ si riduce a questo passando ai reciproci. Se $p > 1$ si ha $\sqrt[n]{p} = 1 + a_n$ con $a_n > 0$. Dalla disuguaglianza di Bernoulli

$$p = (1 + a_n)^n \geq 1 + na_n,$$

si ottiene

$$0 < a_n \leq \frac{p-1}{n},$$

e quindi $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Esempio 2.4 (Radice n-esima di una potenza di n). Per ogni numero reale $\beta > 0$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^\beta} = 1.$$

Proviamo l'effermazione nel caso $\beta = 1$. Si ha certamente $\sqrt[n]{\sqrt{n}} = 1 + a_n$ con $a_n \geq 0$ per ogni $n \geq 1$. Usando nuovamente la disuguaglianza di Bernoulli si trova

$$\sqrt{n} = (1 + a_n)^n \geq 1 + na_n,$$

e quindi

$$0 \leq a_n \leq \frac{\sqrt{n}-1}{n}.$$

Dal Teorema del confronto segue che $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. In conclusione, si ottiene

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} (1 + a_n)^2 = 1.$$

Esempio 2.5 (Confronto fra potenze ed esponenziali). Siano $a, \beta \in \mathbb{R}$ numeri reali tali che $a > 1$ e $\beta > 0$. Si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^\beta}{a^n} = 0.$$

Esaminiamo la successione

$$b_n = \frac{n^\beta}{a^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dal momento che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^\beta a^n}{a^{n+1} n^\beta} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a}\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^\beta = \frac{1}{a} < 1,$$

fissato $\frac{1}{a} < q < 1$, esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $b_{n+1} < qb_n$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Iterando tale disuguaglianza si ottiene

$$0 \leq b_n \leq qb_{n-1} \leq \ldots \leq q^{n-\bar{n}} b_{\bar{n}} = q^n \cdot \frac{b_{\bar{n}}}{q^{\bar{n}}}.$$

Per confronto con la successione geometrica si deduce che $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Esempio 2.6 (Confronto fra esponenziale e fattoriale). Sia $a \in \mathbb{R}$ un numero reale tale che $a > 0$. Si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

Esaminiamo la successione

$$b_n = \frac{a^n}{n!} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dal momento che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n+1} = 0,$$

fissato $0 < q < 1$, esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $b_{n+1} < qb_n$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Come sopra, si conclude che $b_n \to 0$ per $n \to \infty$.

Esempio 2.7 (Confronto fra potenze e logaritmi). Per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\alpha, \beta > 0$ risulta

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log^\beta n}{n^\alpha} = 0.$$

Con la sostituzione $x_n = \log n$, ovvero $n = \mathrm{e}^{x_n}$, si ottiene per $n \geq 1$

$$0 \leq \frac{\log^\beta n}{n^\alpha} = \frac{x_n^\beta}{\mathrm{e}^{x_n \alpha}} \leq \frac{([x_n]+1)^\beta}{(\mathrm{e}^\alpha)^{[x_n]}}.$$

Siccome $\mathrm{e} > 1$ e $\alpha > 0$, la base dell'esponenziale verifica $\mathrm{e}^\alpha > 1$. Dunque, fissato $\varepsilon > 0$ esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che risulti

$$\frac{([x_n]+1)^\beta}{(\mathrm{e}^\alpha)^{[x_n]}} < \varepsilon$$

non appena $[x_n] > M$. Ma siccome

$$\lim_{n\to\infty} [x_n] = \lim_{n\to\infty} [\log n] = \infty,$$

esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $[x_n] > M$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Abbiamo così provato che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \bar{n}$ si ha

$$0 \leq \frac{\log^\beta n}{n^\alpha} < \varepsilon.$$

3. Successioni monotone

Definizione 3.1 (Successioni monotone). Una successione reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si dice:

i) *crescente* se $a_n \leq a_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
ii) *strettamente crescente* se $a_n < a_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
iii) *decrescente* se $a_n \geq a_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
iv) *strettamente decrescente* se $a_n > a_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Una successione crescente o decrescente si dice *monotona*.

PROPOSIZIONE 3.2. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione crescente e (superiormente) limitata. Allora la successione è convergente e inoltre

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\big\{a_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\big\} = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n.$$

DIM. L'insieme $A = \big\{a_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\big\}$ è superiormente limitato e quindi esiste finito

$$L = \sup A \in \mathbb{R}.$$

Siccome L è un maggiorante di A si ha $a_n \leq L$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Siccome L è il minimo dei maggioranti di A, esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $a_{\bar{n}} > L - \varepsilon$. Dal fatto che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente, si deduce che per $n \geq \bar{n}$ si ha:

$$a_n \geq a_{\bar{n}} > L - \varepsilon.$$

Abbiamo dunque provato che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per $n \geq \bar{n}$ risulta

$$L - \varepsilon < a_n \leq L < L + \varepsilon.$$

Questa è la tesi della proposizione. □

Se una successione crescente $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non è superiormente limitata, allora un argomento analogo al precedente prova che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

Per le successioni decrescenti valgono affermazioni analoghe. Ad esempio, se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente e inferiormente limitata, allora

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n \in \mathbb{N} : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}.$$

Nella dimostrazione della Proposizione 3.2 abbiamo usato l'Assioma di completezza dei numeri reali per assicurarci dell'esistenza del numero $L \in \mathbb{R}$.

ESERCIZIO 3.1. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la seguente successione definita in modo ricorsivo:

$$a_0 = 0, \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, \quad n \geq 0.$$

Provare che la successione converge a calcolarne il limite.

Soluzione. Mostriamo che la successione è crescente e superiormente limitata. Sia $f(x) = \sqrt{2+x}$ la funzione, definita per $x \geq -2$, che interviene nella definizione ricorsiva $a_{n+1} = f(a_n)$. Studiamo la disuguaglianza

$$f(x) > x \quad \Leftrightarrow \quad -1 < x < 2.$$

Dunque, fintantochè $0 \leq a_n < 2$, risulta $a_{n+1} > a_n$. Proviamo per induzione che $0 \leq a_n < 2$. Per $n = 0$ questo è chiaro. Inoltre, si ha

$$a_{n+1} < 2 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2 + a_n} < 2 \quad \Leftrightarrow \quad a_n < 2.$$

Questo prova che la successione è crescente (strettamente) e superiormente limitata. Dunque esiste finito

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Passando al limite nella relazione ricorsiva $a_{n+1} = f(a_n)$ ed usando la continuità di f si trova

$$L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim_{n\to\infty} a_n) = f(L).$$

Le soluzioni dell'equazione $L = f(L)$ sono $L = -1$ che è da scartare ed $L = 2$. Dunque, il limite è $L = 2$.

4. Esercizi svolti

Esercizio 4.1. Usando la definizione provare che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - \log(n+1)}{n} = \infty.$$

Soluzione. Fissato $M > 0$ dobbiamo trovare $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \bar{n}$ si abbia

$$\frac{n^2 - \log(n+1)}{n} \geq M.$$

Tale disequazione non si risolve in modo esatto. Usiamo il metodo delle maggiorazioni. Siccome $\log(n+1) \leq n$, avremo

$$\frac{n^2 - \log(n+1)}{n} \geq n - 1.$$

Risolviamo la disequazione semplificata

$$n - 1 \geq M \quad \Leftrightarrow \quad n \geq M + 1.$$

Possiamo dunque scegliere $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\bar{n} \geq M+1$. Un tale $\bar{n}$ esiste per il Principio di Archimede. Dunque, per ogni $n \geq \bar{n}$ avremo

$$\frac{n^2 - \log(n+1)}{n} \geq n - 1 \geq \bar{n} - 1 \geq M.$$

Esercizio 4.2. Calcolare il seguente limite:

$$L = \lim_{n\to\infty} \Big(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \Big).$$

Soluzione. Abbiamo le stime

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \leq 1, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{4.9}$$

e inoltre

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \geq \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{1}{\sqrt{1+1/n}}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4.10}$$

Siccome $x \mapsto \sqrt{x}$ è una funzione continua:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)} = \sqrt{1} = 1,$$

e quindi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1, \tag{4.11}$$

e per il Teorema del Confronto da (4.9),(4.10) e (4.11) deduciamo che $L = 1$.

Esercizio 4.3. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n}.$$

Soluzione. Dalle disuguaglianze

$$3 = \sqrt[n]{3^n} \leq \sqrt[n]{2^n + 3^n} \leq \sqrt[n]{3^n + 3^n} = 3\sqrt[n]{2},$$

e dal fatto che

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1,$$

segue per il Teorema del Confronto che

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n} = 3.$$

Esercizio 4.4. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - n\sin n}{3n^2 + \cos n}.$$

Soluzione. Abbiamo

$$\frac{n^2 - n\sin n}{3n^2 + \cos n} = \frac{n^2\Big(1 - \frac{\sin n}{n}\Big)}{n^2\Big(3 + \frac{\cos n}{n^2}\Big)} = \frac{1 - \frac{\sin n}{n}}{3 + \frac{\cos n}{n^2}}.$$

Poichè "successione infinitesima per successione limitata = successione infinitesima", si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n^2} = 0.$$

Dal Teorema sul quoziente dei limiti otteniamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - n\sin n}{3n^2 + \cos n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{\sin n}{n}}{3 + \frac{\cos n}{n^2}} = \frac{1}{3}.$$

Esercizio 4.5. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n\to\infty} n^{2/3}\big(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}\big).$$

Soluzione. Usiamo l'identità

$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$$

per ottenere

$$\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} = \frac{(n+1) - n}{\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{n(n+1)} + \sqrt[3]{n^2}}.$$

Quindi

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n^{2/3}\big(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}\big) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{2/3}}{\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{n(n+1)} + \sqrt[3]{n^2}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(1+1/n)^2} + \sqrt[3]{1+1/n} + 1} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Esercizio 4.6. Calcolare il seguente limite:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{n2^n + \log^4 n}{3^n + n^2}.$$

Soluzione. Il termine dominante al numeratore è $n2^n$, quello al denominatore è 3^n:

$$\frac{n2^n + \log^4 n}{3^n + n^2} = \frac{n2^n}{3^n} \frac{1 + \frac{\log^4 n}{n2^n}}{1 + \frac{n^2}{3^n}}.$$

Osserivamo che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log^4 n}{n2^n} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{3^n} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n2^n}{3^n} = \frac{n}{(3/2)^n} = 0.$$

Dal Teorema sulle operazioni coi limiti segue che $L = 0$.

CHAPTER 4

Serie numeriche

1. Serie numeriche. Definizioni

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una succesione reale. Vogliamo definire, quando possibile, la somma di tutti gli a_n al variare di $n \in \mathbb{N}$. Tale somma di infiniti termini si indica nel seguente modo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n. \tag{1.12}$$

Con tale notazione si vuole indicare un numero reale. Chiameremo un'espressione come in (1.12) una serie reale.

Formiamo la *successione delle somme parziali*

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + \ldots + a_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

La successione $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ può convergere, può divergere a ∞ o $-\infty$, oppure può non avere limite.

Definizione 1.1 (Serie convergente). Se la successione delle somme parziali $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad un numero $s \in \mathbb{R}$, porremo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s,$$

e diremo che la serie *converge* ed ha come *somma* s.

Se la successione delle somme parziali $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a ∞ o $-\infty$, diremo che la serie *diverge* a ∞ o $-\infty$.

Se la successione delle somme parziali $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non ha limite, nè finito nè infinito, diremo che la serie *non converge*.

Il generico addendo a_n che appare nella serie (1.12) si dice *termine generale* della serie, ed $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è la successione dei termini generali.

Teorema 1.2 (Condizione necessaria di convergenza). Se una serie reale

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

converge allora la successione dei termini generali è infinitesima, ovvero

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Dim. Sia $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la successione delle somme parziali. Allora avremo

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s.$$

Dunque, si deduce che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = s - s = 0.$$

$\square$

2. Serie geometrica. Serie telescopiche. Serie armonica generalizzata

2.1. Serie geometrica. Sia $x \in \mathbb{R}$ un numero reale tale che $x \neq 1$. Ricordiamo la formula per le somme geometriche parziali

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Se $|x| < 1$, allora $\lim\limits_{n\to\infty} x^{n+1} = 0$. Se invece $|x| \geq 1$ il limite non esiste (o non esiste finito). Dunque, si ottiene la formula per la serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad x \in \mathbb{R},\ |x| < 1.$$

2.2. Serie telescopiche. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale e formiamo la successione delle differenze $b_n = a_{n+1} - a_n$, $n \in \mathbb{N}$. Allora si ha

$$\sum_{k=0}^{n} b_k = \sum_{k=0}^{n}(a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=0}^{n} a_{k+1} - \sum_{k=0}^{n} a_k = a_{n+1} - a_0.$$

Se ora la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad un limite L, allora la serie con termine generale b_n converge e inoltre

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = L - a_0.$$

Ad esempio, si trova

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\Big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\Big) = \lim_{n\to\infty}\Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big) = 1.$$

L'ultima serie è talvolta chiamata serie di Mengoli.

2.3. Seria armonica generalizzata. Per $\alpha > 0$ si consideri la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

Proposizione 2.1. La serie precedente converge se e solo se $\alpha > 1$.

Dim. Iniziamo dal caso $\alpha = 2$. Dalle disuguaglianze

$$n^2 \geq n(n-1) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$$

si ottiene

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} < \infty$$

e per confronto la serie a sinistra converge. Per $\alpha \geq 2$ si ha $n^\alpha \geq n^2$ e quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

La serie a sinistra converge.

Passiamo al caso $\alpha = 1$. In questo caso si ha

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} &= 1 + \frac{1}{2} + \Big(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\Big) + \Big(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\Big) + \dots \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \Big(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\Big) + \Big(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\Big) + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots = \infty,\end{aligned}$$

e dunque la serie diverge a ∞.

Quando $0 < \alpha < 1$ si ha $n^\alpha \leq n$ e dunque

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty,$$

e per confronto la serie a sinistra diverge a ∞.

Rimane da discutere il caso $1 < \alpha < 2$. In questo caso la serie converge, ma la dimostrazione di questo fatto è rinviata.

$\square$

3. Criterio della radice e del rapporto per serie reali

Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione reale non negativa, allora la successione delle somme parziali

$$s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

è monotona crescente e quindi il limite di $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ esiste sempre, finito oppure ∞.

Iniziamo con il Criterio del confronto.

Teorema 3.1 (Criterio del confronto). Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni reali tali che $0 \leq a_n \leq b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora:

i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \infty$;

ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$.

La verifica del Teorema segue dall'analogo enunciato per le successioni.

Teorema 3.2 (Criterio della radice). Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale non negativa, $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e supponiamo che esista

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

Allora si hanno i seguenti due casi:

i) Se $L < 1$ allora la serie converge $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$.

ii) Se $L > 1$ allora la serie diverge $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$. Di più, il termine generale verifica

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

Se $L = 1$ la serie può sia convergere che divergere a ∞.

Dim. i) Esistono $q \in (0,1)$ e $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tali che $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Dunque $a_n \leq q^n$ per ogni $n \geq \bar{n}$, e quindi

$$\sum_{n=\bar{n}}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=\bar{n}}^{\infty} q^n < \infty.$$

Questo prova la convergenza della serie.

ii) Esistono $q > 1$ e $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tali che $\sqrt[n]{a_n} > q$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Dalla disuguaglianza $a_n > q^n$ si deduce per confronto che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

Quindi la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non è infinitesima, e per la condizione necessaria di convergenza la serie diverge.

□

Teorema 3.3 (Criterio del rapporto). Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale positiva, $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e supponiamo che esista $L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n$. Si hanno i seguenti due casi:

i) Se $L < 1$ allora la serie converge $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$.

ii) Se $L > 1$ allora la serie diverge $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$. Di più, il termine generale verifica

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

Se $L = 1$ la serie può sia convergere che divergere a ∞.

Dim. i) Esistono $q \in (0,1)$ e $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tali che $a_{n+1}/a_n \leq q$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Dunque $a_n \leq q a_{n-1} \leq q^{n-\bar{n}} a_{\bar{n}}$ per ogni $n \geq \bar{n}$, e pertanto

$$\sum_{n=\bar{n}}^{\infty} a_n \leq a_{\bar{n}} q^{-\bar{n}} \sum_{n=\bar{n}}^{\infty} q^n < \infty.$$

Questo prova la convergenza della serie.

ii) Come sopra, si arriva alla disuguaglianza $a_n \geq q a_{n-1} \geq q^{n-\bar{n}} a_{\bar{n}}$ dove ora $q > 1$. Non è dunque verificata la condizione necessaria di convergenza e la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge. □

4. Esercizi svolti

Esercizio 4.1. Dire se converge la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1}.$$

Soluzione. La serie non converge in quanto non è verificata la condizione necessaria di convergenza

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0.$$

Esercizio 4.2. Calcolare la somma delle seguenti serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{2n-1}}.$$

Soluzione. Usiamo la formula per la serie geometrica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = -1 + \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{2}\Big)^n = -1 + \frac{1}{1-1/2} = 1.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{2n-1}} = 3\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{9}\Big)^n = 3\Big(-1 + \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{9}\Big)^n\Big) = 3\Big(-1 + \frac{1}{1-1/9}\Big) = \frac{3}{8}.$$

Esercizio 4.3. Stabilire se converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos n}{\sqrt{1+n^3}}.$$

Soluzione. La serie è a termine positivi:

$$\frac{1+\cos n}{\sqrt{1+n^3}} \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Usiamo il Teorema del Confronto

$$\frac{1+\cos n}{\sqrt{1+n^3}} \leq \frac{2}{\sqrt{1+n^3}} \leq \frac{2}{n^{3/2}}.$$

Essendo $3/2 > 1$, la serie seguente converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{3/2}} < \infty,$$

e per Il Teorema del confronto anche la serie data converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos n}{\sqrt{1+n^3}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{3/2}} < \infty.$$

Esercizio 4.4. Scrivere il numero decimale periodico

$$x = 0,454545\ldots = 0,\overline{45}$$

in forma razionale $x = p/q$ con $p, q \in \mathbb{N}$.

Soluzione. Il significato della rappresentazione decimale è

$$\begin{aligned}
0,\overline{45} &= \frac{4}{10} + \frac{5}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{10^{2n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{10^{2n}} \\
&= \frac{4}{10} \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{100}\Big)^n + 5\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{10}\Big)^n \\
&= \frac{2}{5}\frac{1}{1-1/100} + 5\Big(\frac{1}{1-1/100} - 1\Big) \\
&= \frac{45}{99} = \frac{5}{11}.
\end{aligned}$$

Esercizio 4.5. Verificare che la serie esponenziale

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Soluzione. È una serie a termini positivi:

$$a_n = \frac{1}{n!} > 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Usiamo il Criterio del Rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}.$$

Dunque, si ha

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 < 1,$$

e dunque la serie converge.

Esercizio 4.6. Determinare tutti gli $x \in \mathbb{R}$ tali che converga la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(2+n)}{n} |x|^n.$$

Soluzione. Si tratta di una serie a termini positivi:

$$a_n = \frac{\log(2+n)}{n} |x|^n \geq 0.$$

Possiamo usare il Criterio della Radice. Avremo:

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{\log(2+n)}{n}} |x|.$$

Partiamo dalle seguenti disuguaglianze:

$$\frac{\sqrt[n]{\log 2}}{\sqrt[n]{n}} \leq \sqrt[n]{\frac{\log(2+n)}{n}} \leq \sqrt[n]{\frac{n+1}{n}} = \sqrt[n]{1 + \frac{1}{n}} \leq \sqrt[n]{2}.$$

Dai limiti noti

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\log 2} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1,$$

segue dal Teorema del Confronto che

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\log(2+n)}{n}} = 1.$$

Di conseguenza:

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = |x|.$$

Abbiamo due casi:

1) $L = |x| < 1$. La serie converge.
2) $L = |x| > 1$. La serie diverge a ∞.

Rimane da discutere il caso $L = |x| = 1$, ovvero $x = \pm 1$. In questo caso la serie diventa:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n+2)}{n}.$$

Questa serie diverge, per confronto con la serie armonica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n+2)}{n} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log 2}{n} = \infty.$$

Esercizio 4.7. Determinare tutti i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che converga la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3-1}}{n^\alpha}.$$

Soluzione. Riscriviamo il termine generale nel seguente modo:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\left(\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3-1}\right)\left(\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n^3-1}\right)}{n^\alpha\left(\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n^3-1}\right)} \\ &= \frac{(n^3+1)-(n^3-1)}{n^\alpha n^{3/2}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^3}}\right)} \\ &= \frac{2}{n^{\alpha+3/2}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^3}}\right)}. \end{aligned}$$

Osserviamo che

$$1 \le \sqrt{1+\frac{1}{n^3}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^3}} \le \sqrt{2}+1, \quad n \in \mathbb{N},$$

e dunque

$$\frac{2}{\sqrt{2}+1}\frac{1}{n^{\alpha+3/2}} \le a_n \le \frac{2}{n^{\alpha+3/2}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Siccome

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+3/2}} < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \alpha+\frac{3}{2} > 1,$$

dal Teorema del Confronto segue che la serie data converge se e solo se $\alpha > -1/2$.

Esercizio 4.8. Al variare di $x \in \mathbb{R}$ studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{1+n+x^2n^2}.$$

Soluzione. Distinguiamo i due casi: 1) $x = 0$; 2) $x \neq 0$.

Se $x = 0$ la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Siccome $\sqrt{n+1} \le \sqrt{2n} \le \sqrt{2}\sqrt{n}$ per $n \ge 1$, avremo per il Teorema del Confronto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \ge \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}} = \infty.$$

L'ultima serie diverge essendo $1/2 < 1$.

Quando $x \neq 0$ si può maggiorare il termine generale nel seguente modo:

$$\frac{\sqrt{n+1}}{1+n+x^2n^2} \le \frac{\sqrt{n+1}}{x^2n^2} \le \frac{\sqrt{2n}}{x^2n^2} = \frac{\sqrt{2}}{x^2}\frac{1}{n^{3/2}}.$$

Siccome

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < \infty,$$

essendo $3/2 > 1$, allora dal Teorema del confronto la serie data converge.

Esercizio 4.9. Al variare di $x \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{R}$, con $k \neq 0$, studiare la convergenza della serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{|n-x|}{k}}.$$

Soluzione. La serie è a termini positivi e possiamo dunque usare il Criterio della Radice. Sia
$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mathrm{e}^{-\frac{|n-x|}{k}}} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-\frac{|n-x|}{nk}}.$$
Osserviamo che
$$\lim_{n\to\infty} \frac{|n-x|}{nk} = \lim_{n\to\infty} \frac{|1-x/n|}{k} = \frac{1}{k},$$
e quindi
$$L = \mathrm{e}^{-1/k}.$$

Ci sono due casi:

1) $L < 1$. In questo caso la serie converge. Precisamente:
$$L < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^{-1/k} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{k} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad k > 0.$$

2) $L > 1$. In questo caso la serie diverge. Precisamente:
$$L > 1 \quad \Leftrightarrow \quad k < 0.$$

Il caso $L = 1$ non si presenta. Dunque la serie converge se e solo se $k > 0$ (indipendentemente da $x \in \mathbb{R}$).

5. Il numero e

Il numero e di Nepero si definisce come la somma della "serie esponenziale", che converge per il Criterio del rapporto:
$$\mathrm{e} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$
Il seguente teorema, dove si prova una definizione alternativa del numero e, è utile per risolvere le forme indeterminata del tipo $[1^\infty]$.

Teorema 5.1. Il seguente limite esiste finito e inoltre
$$\lim_{n\to\infty} \Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \mathrm{e}. \tag{5.13}$$

Dim. Proveremo che la successione
$$a_n = \Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n, \quad n \in \mathbb{N},$$
è crescente e superiormente limitata. Dalla Proposizione 3.2 segue l'esistenza finita del limite (5.13).

Dalla formula del binomio di Newton si ottiene
$$a_n = \Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \Big(1-\frac{1}{n}\Big)\dots\Big(1-\frac{k-1}{n}\Big)\frac{1}{k!}, \tag{5.14}$$

e in modo analogo

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big) \dots \Big(1 - \frac{k-1}{n+1}\Big) \frac{1}{k!}.$$

Dalle disuguaglianze

$$\Big(1 - \frac{1}{n}\Big) < \Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big), \dots, \Big(1 - \frac{k-1}{n}\Big) < \Big(1 - \frac{k-1}{n+1}\Big),$$

per $k = 0, 1, \dots, n$, segue che $a_n < a_{n+1}$. Questo prova che la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è strettamente crescente. Siccome

$$\Big(1 - \frac{1}{n}\Big) < 1, \dots, \Big(1 - \frac{k-1}{n}\Big) < 1,$$

dall'identità (5.14) si trova anche la maggiorazione

$$a_n = \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \mathrm{e}. \tag{5.15}$$

Questo prova che la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è superiormente limitata. Dunque, esiste finito il limite e si ha

$$\lim_{n\to\infty} a_n \le \mathrm{e}.$$

Vogliamo provare la disuguaglianza opposta.

Siano $m, n \in \mathbb{N}$ numeri naturali tali che $m \le n$. Allora, ripartendo dall'identità (5.14), si trova:

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=0}^{n} \Big(1 - \frac{1}{n}\Big) \dots \Big(1 - \frac{k-1}{n}\Big) \frac{1}{k!} \\ &\ge \sum_{k=0}^{m} \Big(1 - \frac{1}{n}\Big) \dots \Big(1 - \frac{k-1}{n}\Big) \frac{1}{k!}. \end{aligned}$$

In questa disuguaglianza passiamo al limite per $n \to \infty$ e otteniamo la disuguaglianza

$$\lim_{n\to\infty} a_n \ge \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!},$$

che a questo punto vale per ogni $m \in \mathbb{N}$. Passando ora al limite per $m \to \infty$ si trova

$$\lim_{n\to\infty} a_n \ge \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \mathrm{e}.$$

□

Osservazione 5.2. Il Teorema 5.1 si può generalizzare nel seguente modo. Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^n = \mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}. \tag{5.16}$$

Osservazione 5.3. Il numero di Nepero e verifica

$$\mathrm{e} > 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} = 2 + \frac{2}{3}.$$

Per ottenere una stima dall'alto si può usare la seguente disuguaglianza, che non dimostriamo,

$$\mathrm{e} < \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} + \frac{n}{n!(n-1)},$$

che con $n = 4$ fornisce

$$\mathrm{e} < 2 + \frac{2}{3} + \frac{1}{18} < 3.$$

6. Serie a segno alterno. Criterio di Leibniz

Per questa parte si vedano gli appunti manoscritti in rete.

7. Convergenza assoluta

In questa sezione illustriamo il Criterio della convergenza assoluta, che fornisce una condizione sufficiente per la convergenza di serie con termine generale non necessariamente di segno costante.

Definizione 7.1. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali. Diciamo che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge *assolutamente* se converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty.$$

Teorema 7.2. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali. Se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge assolutamente allora converge anche semplicemente ed inoltre

$$\Big|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\Big| \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \tag{7.17}$$

Dim. Definiamo per ogni $n \in \mathbb{N}$ la parte positiva e la parte negativa di a_n nel seguente modo

$$a_n^+ = \max\{a_n, 0\}, \quad a_n^- = \min\{a_n, 0\}.$$

Le successioni $(a_n^+)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(a_n^-)_{n\in\mathbb{N}}$ verificano le seguenti proprietà: i) $a_n^+ \ge 0$ e $a_n^- \le 0$; ii) $a_n = a_n^+ + a_n^-$; iii) $|a_n| = a_n^+ - a_n^-$; iv) $a_n^+, -a_n^- \le |a_n|$. Dal teorema del confronto abbiamo

$$0 \le \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty, \quad 0 \le -\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty.$$

Dalle identità

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (a_k^+ + a_k^-) = \sum_{k=1}^{n} a_k^+ + \sum_{k=1}^{n} a_k^-$$

segue allora anche l'esistenza finita del limite

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^-.$$

Infine, dalla disuguaglianza

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} a_k\Big| \le \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

segue la tesi (7.17). Questo termina la prova. □

8. Esercizi svolti

Esercizio 8.1. Discutere la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt[3]{\sin\Big(\frac{1}{n+1}\Big)}(-1)^n.$$

Soluzione. Abbiamo

$$a_n = \sqrt[3]{\sin\Big(\frac{1}{n+1}\Big)} \geq 0,$$

e quindi siamo in presenza di una serie a segno alterno. Verifichiamo le ipotesi del Criterio di Leibniz:

1) La successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è infinitesima. Infatti:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{\sin\Big(\frac{1}{n+1}\Big)} = \sqrt[3]{\lim_{n\to\infty} \sin\Big(\frac{1}{n+1}\Big)} = \sqrt[3]{\sin\Big(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\Big)} = 0.$$

Abbiamo usato il fatto che la radice cubica e il seno sono funzioni continue.

2) La successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente. Dobbiamo controllare che

$$a_{n+1} \leq a_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Osserviamo che la funzione $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ è crescente. Inoltre, sull'intervallo $[0, \pi/2]$ la funzione $x \mapsto \sin x$, $x \in [0, \pi/2]$, è crescente. Di conseguenza, la funzione composta

$$f(x) = \sqrt[3]{\sin x}, \quad x \in [0, \pi/2],$$

è (strettamente) crescente. Deduciamo che

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad \sqrt[3]{\sin\Big(\frac{1}{n+1}\Big)} < \sqrt[3]{\sin\Big(\frac{1}{n}\Big)},$$

e quindi $a_{n+1} < a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Per il Criterio di Leibniz la serie data converge.

Esercizio 8.2. Al variare di $x \in \mathbb{R}$ studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{5^n \log(n+1)}(x^2 - 2x)^n.$$

Soluzione. La serie non è a termini positivi. Iniziamo a studiare la convergenza assoluta. Detto

$$a_n(x) = \frac{(-4)^n}{5^n \log(n+1)}(x^2 - 2x)^n,$$

studiamo la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(x)|$$

con il Criterio della Radice. Dobbiamo calcolare il seguente limite:

$$L(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{5\sqrt{\log(n+1)}}|x^2 - 2x|.$$

Per confronto

$$\sqrt[n]{\log 2} \leq \sqrt[n]{\log(n+1)} \leq \sqrt[n]{n},$$

e siccome

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\log 2} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

dal Teorema del Confronto deduciamo che

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\log(n+1)} = 1,$$

e dunque

$$L(x) = \frac{4}{5}|x^2 - 2x|.$$

Dal Criterio della Radice si ottengono le seguenti conclusioni:

1) $L(x) < 1$ implica che la serie converge assolutamente.
2) $L(x) > 1$ implica che la serie non converge assolutamente. Di più, si ha $\lim_{n\to\infty} |a_n(x)| = \infty$ e quindi il termine generale non è infinitesimo. Dunque, nel caso $L(x) > 1$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} a_n(x) \neq 0,$$

e quindi non c'è nemmeno convergenza semplice della serie.

Risolviamo la disequazione

$$L(x) < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4}{5}|x^2 - 2x| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x^2 - 2x| < \frac{5}{4}.$$

La disequazione con valore assoluto è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x^2 - 2x < \frac{5}{4} \\ x^2 - 2x > -\frac{5}{4} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - 2x - \frac{5}{4} < 0 \\ x^2 - 2x + \frac{5}{4} > 0. \end{cases}$$

Le radici del polinomio $x^2 - 2x - 5/4 = 0$ sono

$$x_\pm = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 5/4}}{2} = 1 \pm \sqrt{1 + \frac{5}{4}} = 1 \pm \frac{3}{2}.$$

Dunque si ha

$$x^2 - 2x - \frac{5}{4} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2} < x < \frac{5}{2}.$$

L'equazione $x^2 - 2x + \frac{5}{4} = 0$ non ha radici reali. Dunque $x^2 - 2x + \frac{5}{4} > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. La conclusione è che:

$$L(x) < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x^2 - 2x| < \frac{5}{4} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2} < x < \frac{5}{2}.$$

Per tali valori della x la serie converge assolutamente e quindi semplicemente. Analogamente, si ha

$$L(x) > 1 \quad \Leftrightarrow \quad x < -\frac{1}{2} \quad \text{oppure} \quad x > \frac{5}{2}.$$

Per tali valori della x la serie non converge (nè assolutamente nè semplicemente) in quanto il termine generale non è infinitesimo.

Rimane da discutere il caso:

$$L(x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x^2 - 2x| = \frac{5}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{2} \quad \text{oppure} \quad x = \frac{5}{2}.$$

In entrambi i casi si ha $x^2 - 2x = \frac{5}{4}$, e quindi la serie iniziale diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(n+1)}. \tag{8.18}$$

Questa serie converge (semplicemente) per il Criterio di Leibniz. Infatti, la successione

$$a_n = \frac{1}{\log(n+1)}, \quad n \in \mathbb{N},$$

verifica:

1) È infinitesima:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log(n+1)} = 0.$$

2) È decrescente:

$$\begin{aligned} a_{n+1} \le a_n \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\log(n+2)} \le \frac{1}{\log(n+1)} \\ &\Leftrightarrow \quad \log(n+1) \le \log(n+2) \\ &\Leftrightarrow \quad n+1 \le n+2 \\ &\Leftrightarrow \quad 1 \le 2. \end{aligned}$$

Proviamo che la serie (8.18) non converge assolutamente, ovvero:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(n+1)} = \infty.$$

Lo proviamo per confronto partendo dalla disuguaglianza

$$\log(n+1) \le n \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\log(n+1)} \ge \frac{1}{n},$$

e dunque

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(n+1)} \ge \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Esercizio 8.3. Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big(\sin(\sin n)\big)^n.$$

Soluzione. Osserviamo che $-1 \le \sin n \le 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Di conseguenza si ha:

$$|\sin(\sin n)| \le \sin 1 = q < 1.$$

Per confronto con la serie geometrica di ragione $q < 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\sin(\sin n)|^n \le \sum_{n=1}^{\infty} q^n < \infty.$$

La serie data converge assolutamente e quindi anche semplicemente.

Esercizio 8.4. Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}.$$

Soluzione. Il termine generale della serie

$$a_n = \frac{n!}{n^n} > 0$$

è positivo e dunque possiamo utilizzare il Criterio del Rapporto. Avremo

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

Quindi si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\mathrm{e}} < 1,$$

in quanto $\mathrm{e} > 1$. Per il Criterio del Rapporto la serie converge.