Lezione 10

mercoledì 22 ottobre 2014
09:19

ES. 8 $x \in \mathbb{R}$. Studiare

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{1+n+x^2 n^2}$$

Termini positivi

Se $x \neq 0$ allora n^2 al den. è "efficace"

Distinguo due casi:

1° CASO: $x = 0$. La serie è

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Procedo con un confronto:

$$\sqrt{n+1} \underset{n\geq 1}{\leq} \sqrt{n+n} = \sqrt{2n} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{n}} \quad \forall n \geq 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}} = \infty \quad \text{Con} \quad 1/2 < 1$$

FATTO NOTO

Per confronto: La serie diverge.

2° CASO: $x \neq 0$. Cerco di provare con un confronto che la serie converge:

$$\frac{\sqrt{n+1}}{\underbrace{n+1}_{\geq 0} + x^2 n^2} \leq \frac{\sqrt{2}\, n^{1/2}}{x^2 n^2} = \frac{\sqrt{2}}{x^2} \frac{1}{n^{3/2}} \quad \forall n \geq 1$$

$$n+1+x^2n^2 \geq x^2 \cdot n^2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bigcirc \leq \frac{\sqrt{2}}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < \infty$$ FATTO NOTO perché $3/2 > 1$

Per confronto la serie converge.

<u>ES 9</u> Al variare di $x \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, studiare la convergenza della serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{|n-x|}{k}} .$$

Serie a termini positivi.

Provo con il criterio della Radice:

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{e^{-\frac{|n-x|}{k}}} = \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{|n-x|}{kn}}$$

limite dell'esponente

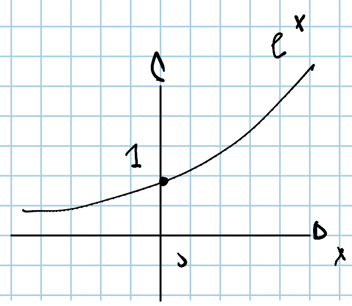
$$\lim_{n\to\infty} \frac{-|n-x|}{k \cdot n} = \lim_{n\to\infty} - \frac{\left|1-\frac{x}{n}\right|}{k} = -\frac{1}{k}$$

Quindi:

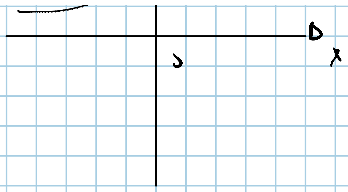
$$L = e^{-\frac{1}{k}}$$ (non dipende da x)

<u>1° CASO</u> $L < 1 \overset{CR}{\Rightarrow}$ serie converge

$$L < 1 \iff e^{-\frac{1}{k}} < 1$$



1



$$\iff \quad -\frac{1}{k} < 0$$

$$\iff \quad k > 0$$

2° caso $\quad L > 1 \overset{CR}{\Longrightarrow}$ serie diverge:

$$L > 1 \iff k < 0$$

Il caso $L = 1$ non si presenta. $\square$

Il numero e (forme indeterminate $[1^\infty]$)

Possiamo definire il numero di Nepero e tramite la serie esponenziale cioè

$$e := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \cdots .$$

La serie converge per il Criterio del Rapporto.

TEOR Si ha il seguente limite notevole:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

$\uparrow$ FI del tipo $[1^\infty]$.

Dim. Consideriamo questa successione

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad n \geq 1$$

Proveremo che

① $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è crescente

② $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è superiormente limitata

Infine

③ Proveremo che $a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} e$.

Conti:

Binomio di Newton

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}$$

ci sono $n - (n-k) = k$ fattori

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)\cdot \cancel{(n-k)!}}{\cancel{(n-k)!}} \cdot \frac{1}{n^k}$$

$$\circledast = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdot\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

Analogamente

$$a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\cdot\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right)$$

Ovvero che

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \iff -\frac{1}{n+1} > -\frac{1}{n}$$

$$\iff 1 - \frac{1}{n+1} > 1 - \frac{1}{n}$$

Conclusione: Ho provato che

$$a_n < a_{n+1} \quad \forall n \geq 1$$

La successione è crescente.

Riparto da qui $\circledast$

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right)} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{2}{n}\right)} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)} \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$$

Ho scoperto che

$$a_n < e \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

La succ. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è sup. limitata.

Per il Teorema visto in Classe esiste finito

$$\left.\begin{array}{l} L = \lim_{n\to\infty} a_n \leq e \\ \text{Ora dimostreremo che} \\ \lim_{n\to\infty} a_n \geq e \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Riparto da ⊛

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

Se ora $m \in \mathbb{N}$ con $m \leq n$ si avrà:

$$a_n \geq \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

Faccio il limite per $n\to\infty$ e trovo

$$\lim_{n\to\infty} a_n \geq \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{k-1}{n}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \quad \text{dis. vera} \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

Ora con $m \to \infty$ trovo

$$\lim_{n\to\infty} a_n \geq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

□.

Osservazioni (Senza Prova)

(1) Il teorema precedente può essere migliorato. Vale:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = e^x \,, \qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

(2) Chiaramente

$$e = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} > 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!} = 2+\frac{2}{3}$$

Inoltre si può dimostrare questa stima dall'alto:

$$e < \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!} + \frac{n}{n!\cdot(n-1)} \qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

Con $n=4$ si trova

$$e < 2+\frac{2}{3}+\frac{1}{18} < 3 \,.$$

Serie a segno alterno. Criterio di Leibniz

Una serie numerica della forma

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot a_n$$

Fattore alternante

dove $a_n \geq 0$ $\forall n$ si dice serie a segno alterno.

TEOR. (Criterio di Leibniz) Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali tale che:

(1) $a_{n+1} \leq a_n$ $\forall n$ (Successione decrescente)

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (successione infinitesima)

Allora la serie a segno alterno

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

CONVERGE.

Dim. Osserviamo che $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
Voglio dimostrare che le somme parziali

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k \quad , \quad n \in \mathbb{N},$$

convergono ad un valore finito.
Dimostrerò questo:

(1) $S_{2n} \to L_1$ Esiste finito — Somme parziali troncate ad indice pari

(2) $S_{2n+1} \to L_2$ Esiste finito — Somme parz. troncate ad indice dispari

(3) $L_1 = L_2$

Allora dai fatti (1) + (2) + (3) segue che esiste finito

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \underset{\substack{\cap \\ \mathbb{R}}}{L} \left(= L_1 = L_2\right).$$

Studio le somme parziali pari

$$S_{2n+2} = S_{2(n+1)} = \sum_{k=0}^{2n+2} (-1)^k a_k =$$

$$= (-1)^{2n+2} a_{2n+2} + (-1)^{2n+1} a_{2n+1} + \underbrace{\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k}_{= S_{2n}}$$

$$= a_{2n+2} - a_{2n+1} + S_{2n} \leq$$

Siccome $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ decresce allora $a_{2n+2} \leq a_{2n+1}$

$$\Updownarrow$$

$$a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0$$

$$\leq 0 + S_{2n}$$

Ho scoperto che $S_{2(n+1)} \leq S_{2n}$

sono decrescenti.

Con conti analoghi trovo che

$$S_{2n+1} = \underbrace{-a_{2n+1} + a_{2n}}_{\geq 0} + S_{2n-1} \geq S_{2n-1}$$

Ho scoperto che le somme parziali dispari crescono.

$$S_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^k a_k = \underset{\geq 0}{-a_{2n+1}} + \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k \leq$$

$$\leq S_{2n} \quad \forall n$$

Incrocio tutte le informazioni:

$$S_1 \leq S_3 \leq S_5 \leq \dots \leq S_{2n+1} \leq S_{2n} \leq S_{2(n-1)} \leq \dots \leq S_4 \leq S_2 \; //$$

Quindi le

$(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ crescono e sono sup limitate

$(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ decrescono e sono infer. limitate

Quindi esistono finiti

$$L_1 = \lim_{n \to \infty} S_{2n+1} \in \mathbb{R}$$

$$L_2 = \lim_{n \to \infty} S_{2n} \in \mathbb{R}$$

Inoltre

$$L_1 - L_2 = \lim_{n \to \infty} S_{2n+1} - \lim_{n \to \infty} S_{2n}$$

$$= \lim \left(S_{2n+1} - S_{2n} \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} (-1)^{2n+1} a_{2n+1} = 0$$

perché $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è infinitesima.

cioè $L_1 = L_2$

$\square$