Lezione 14

giovedì 30 ottobre 2014
14:03

$$f : [0,1] \to [0,1] \, , \quad f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

Suriettività: Dato $y \in [0,1]$ cerchiamo $x \in [0,1]$ soluzione di

$$\frac{2x}{1+x^2} = f(x) = y \iff x_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1-y^2}}{y}$$

Studio x_+

$$x_+ = \frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y} \overset{?}{\leq} 1 \iff 1+\sqrt{1-y^2} \leq y$$

$$\iff \sqrt{1-y^2} \leq y-1 \quad \text{con } y \in [0,1]$$

è negativo

No

Dunque x_+ è da scartare

Studio x_-

$$x_- = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y} \leq 1 \iff 1-\sqrt{1-y^2} \leq y$$

$\vee\!/$ ok

È accettabile

$$\iff \underset{\geq 0}{1-y} \leq \underbrace{\sqrt{1-y^2}}_{\geq 0}$$

$$\iff (1-y)^2 \leq 1-y^2$$

$$\iff \cancel{1} - 2y + \underbrace{y^2} \leq \cancel{1} \underbrace{- y^2}$$

$$\iff 2y^2 - 2y \leq 0$$

$$\iff y(y-1) \leq 0$$

$$\iff 0 \leq y \leq 1 \quad \text{si!}$$

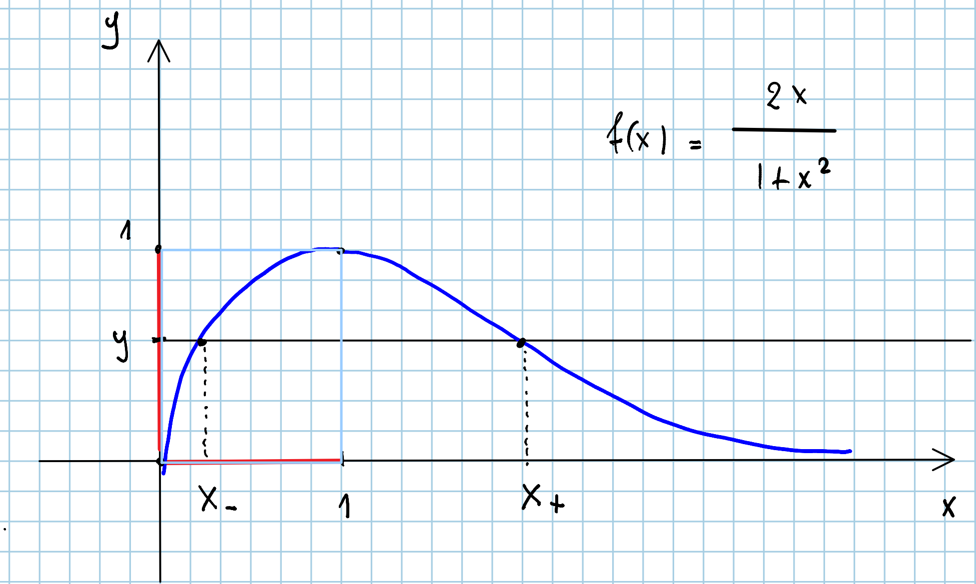
2) Calcolare $f^{-1} : [0,1] \to [0,1]$

$$f^{-1}(y) = x_- = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{}$$

non definita

$$f^{-1}(y) = x_- = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$$ non definita per $y = 0$

$$= \frac{1-(1-y^2)}{y\,(1+\sqrt{1-y^2})} = \frac{y}{1+\sqrt{1-y^2}}$$ ok definita per $y \in [0,1]$.



Funzioni crescenti e decrescenti

DEF Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice crescente su A se

$$x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$$
$$x_1, x_2 \in A$$

Diremo che f è strett. crescente se

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$$

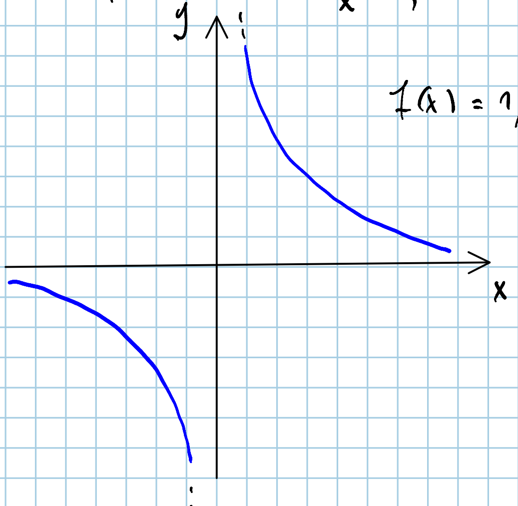
Poi: f si dice (strett.) decrescente se

$$x_1 \overset{(<)}{\leq} x_2 \implies f(x_1) \overset{(>)}{\geq} f(x_2).$$

Esempio Guardiamo la funz. $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{x}, \qquad x \neq 0.$$

$$f(x) = \frac{1}{x}, \qquad x \neq 0.$$



f NON è decrescente in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Tuttavia f è decrescente in $(-\infty, 0)$

f " " " $(0, \infty)$ separatamente

Esempio La funzione $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = x^n \qquad \text{con } n \in \mathbb{N} \quad n \geq 1 \text{ fissato}$$

è strettamente crescente.

Verifica algebrica. Prendo $x \geq 0$, $h > 0$ e provo che

$$f(x+h) > f(x)$$

Infatti

$$f(x+h) = (x+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k h^{n-k}$$

$$= x^n + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} x^k h^{n-k}}_{\geq 0} + \underbrace{h^n}_{> 0}$$

$$> x^n = f(x).$$

Osservazione

- f è strett. crescente $\overset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ f è 1-1

- f è strett. crescente (o strett. decrescente) $\Big\} \overset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} f$ è 1-1

Esempio

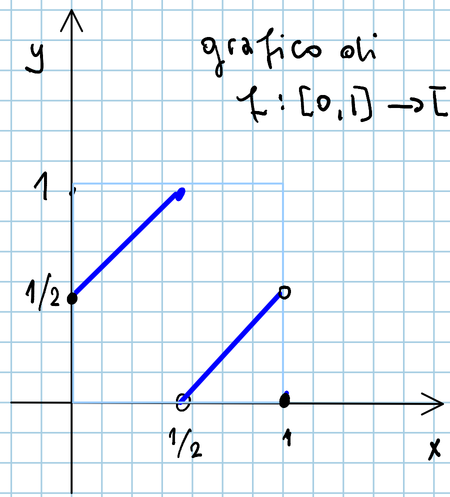
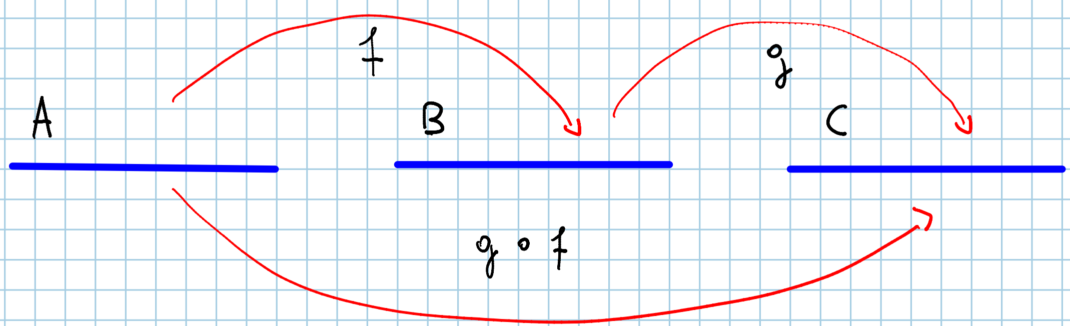


grafico di $f:[0,1] \to [0,1]$

Funzione Composta

DEF Siano $A, B, C \subset \mathbb{R}$ sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ e siano $f: A \to B$ e $g: B \to C$.
Allora possiamo definire la funzione composta $g \circ f$ ("g composto f") $g \circ f: A \to C$ nel seg. modo

$$g \circ f(x) = g(f(x)) \qquad x \in A$$



Esempio Siano $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^4$
$g: [-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{1+x}$

Siccome l'immagine di f, cioè $f(\mathbb{R}) = [0, \infty)$, è un sottoinsieme del dominio di g allora posso formare la funzione composta $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$[0, \infty)$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^4) = \sqrt{1+x^4}.$$

Osservazione

(1) se f è crescente e g è crescente $\Rightarrow$ $g \circ f$ crescente

(2) f è crescente e g è decrescente $\Rightarrow$ $g \circ f$ decresce

(3) f è decrescente e g è decresce $\Rightarrow$ $g \circ f$ crescente

Osservazione

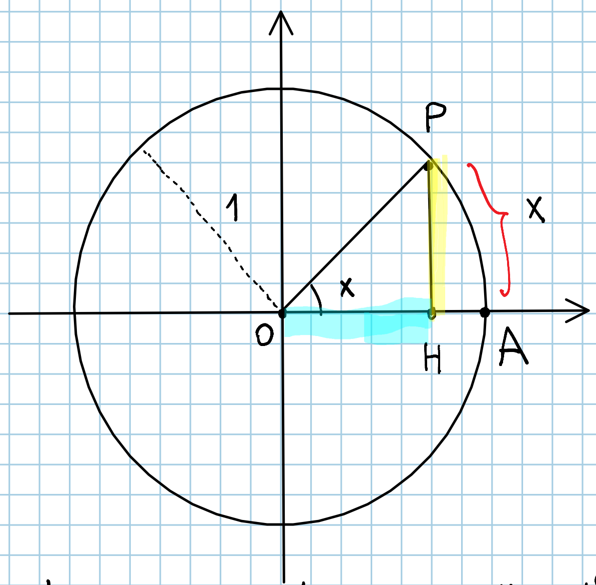
Supponiamo che $f : A \to B$ sia 1-1 e su.
Allora:

- $f^{-1} \circ f$ = Funzione identità su A.
- $f \circ f^{-1}$ = " " su B.

Funzioni trigonometriche e loro inverse

C = Circonferenza di raggio 1 centrata in $O \in \mathbb{R}^2$

$P \in C$



$x = \widehat{POA}$ misurato in radianti, $x \in \mathbb{R}$
in senso antiorario
teniamo conto dei "giri"

2π = lunghezza di tutta la circonf.

Definiamo $\sin : \mathbb{R} \to [-1,1]$

$\cos : \mathbb{R} \to [-1,1]$

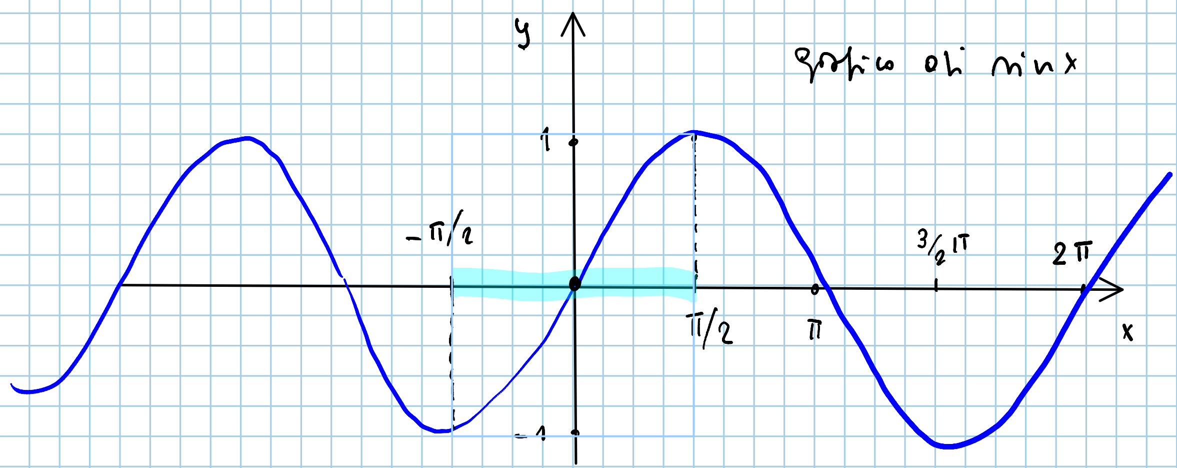
$\sin x = \overline{PH}$ = lunghezza con segno del segmento PH

$\cos x = \overline{OH}$ = lunghezza " " " " OH

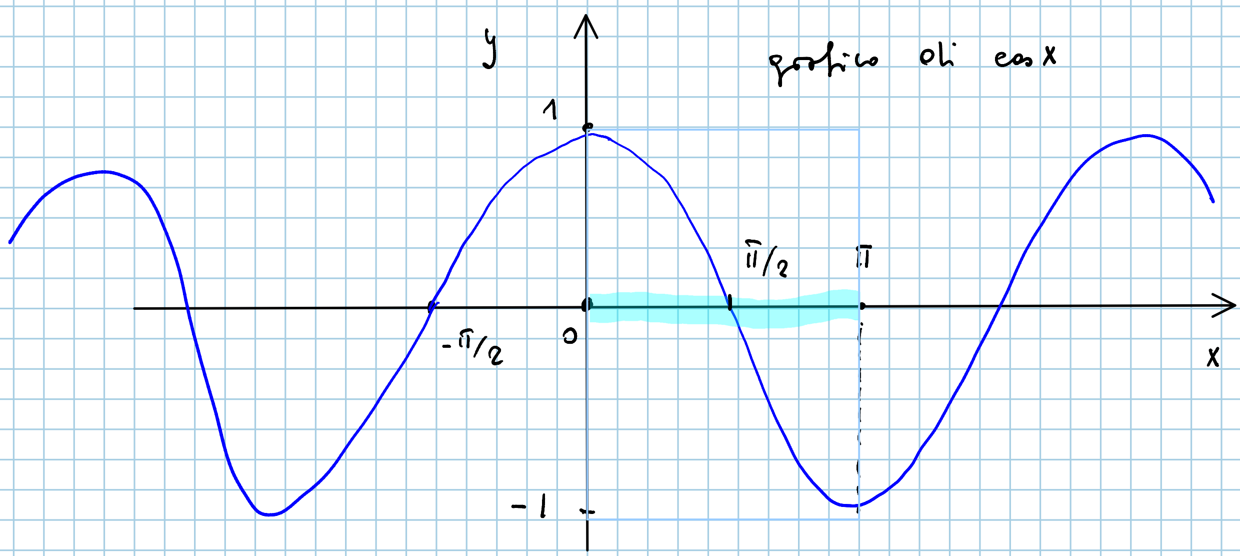
Le due funzioni sono 2π - periodiche

$\sin(x+2\pi) = \sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\cos(x+2\pi) = \cos x \quad \forall x \in \mathbb{R}$



sin x è una funz. dispari



Funzioni trigonometriche inverse

Osservo che $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1,1]$ è una funzione strett. crescente e quindi iniettiva. Inoltre è suriettiva. Quindi esiste la funzione inversa

$$\arcsin : [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$$

È una funz. strett. crescente

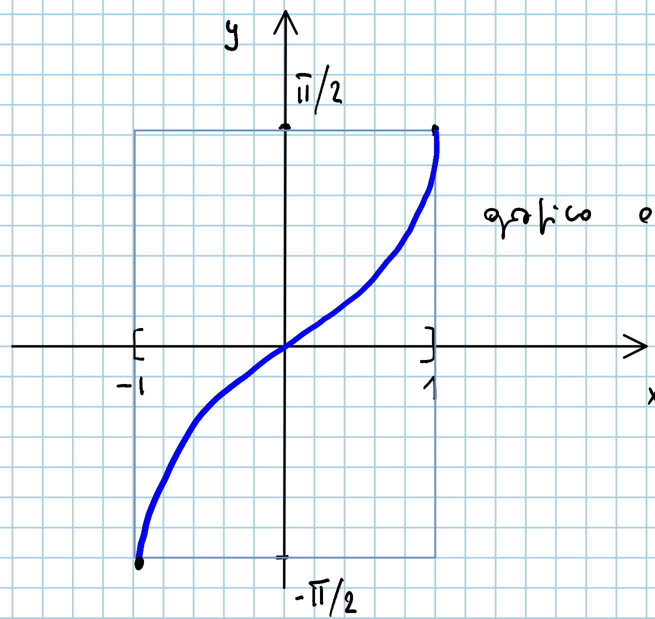


grafico di arcsin x

Poi osservo che $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ è strett. decrescente e suriettiva. Quindi esiste la funzione inversa

$$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$$

Ne disegno il grafico

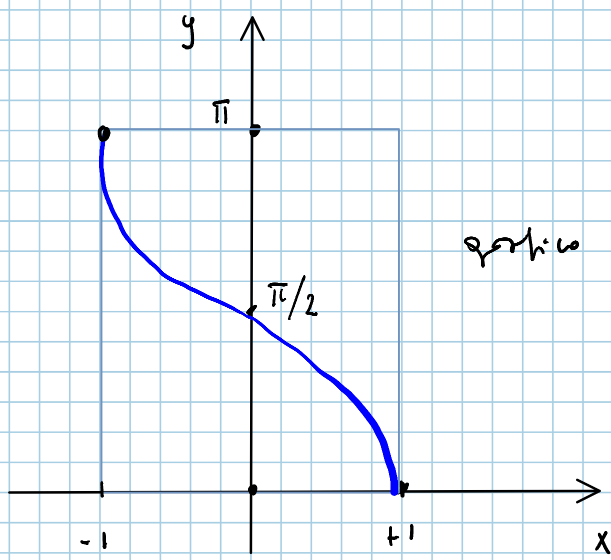


grafico di arccos x

Attenzione: $D(\arcsin) = [-1,1]$

$D(\arccos) = [-1,1]$

Esercizio Determinare il dominio e disegnare il grafico della seguente funzione

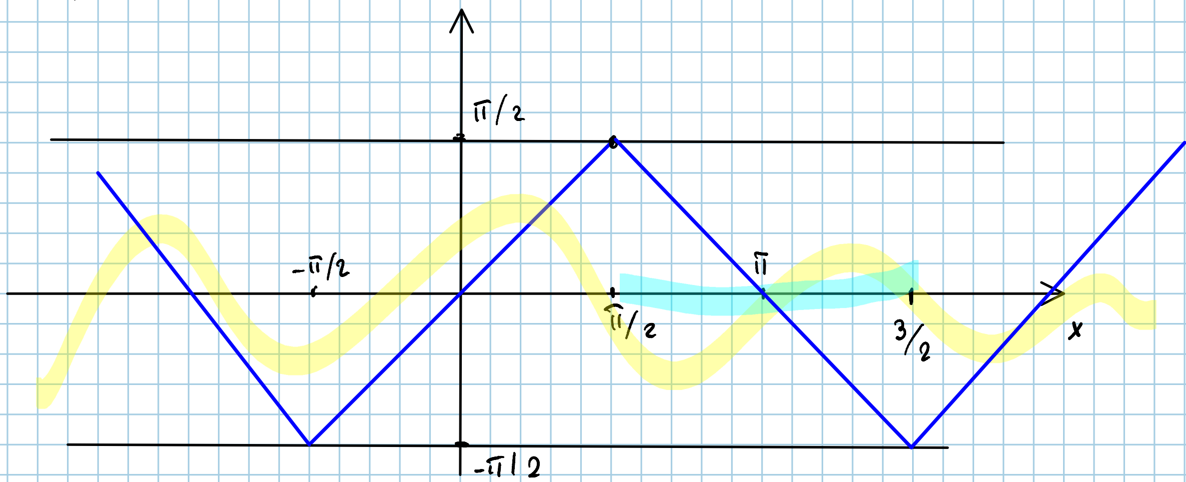
$$f(x) = \arcsin(\sin x)$$

La composizione è sempre definita quindi $D(f) = \mathbb{R}$

Inoltre
$$-\frac{\pi}{2} \leq f(x) \leq \pi/2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ora se $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ posso dire che

$$f(x) = \arcsin(\sin x) = x$$



Altra osservazione: siccome $\sin x$ è 2π-periodica allora anche $f(x)$ è 2π-periodica

Prendo $\pi/2 < x \leq \frac{3}{2}\pi$, avremo

$$f(x) = \arcsin(\sin x)$$

Allora $x - \pi \in [-\pi/2, \pi/2]$. Devo usare le formule

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$$

$$\sin(x-\pi) = \sin(x)\cos(-\pi) + \cos x \sin(-\pi)$$

$$= \sin x \cdot (-1) + \cos x \cdot 0$$

$$= -\sin x$$

Ovvero $\sin x = -\sin(x-\pi)$.

Torno al mio conto: $\sin x = -\sin(x-\pi)$

$$f(x) = \arcsin(\sin x) = \arcsin(-\sin(x-\pi))$$

$$= -\arcsin(\sin(\underbrace{x-\pi}_{\in[-\pi/2,\pi/2]}))$$

$$= -(x-\pi)$$

$$= -x+\pi$$

Ho scoperto che per $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$

$$f(x) = -x+\pi \qquad \square$$

Identità trigonometriche fondamentali

(1) Identità fondamentale

$$\sin^2 x + \cos^2 x \quad 1$$

(2) Formule di Addizione

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

(3) Formule di Duplicazione

$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

(4) Formule di bisezione:

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$