# Lezione 17

giovedì 6 novembre 2014
13:56

## Operazioni con i limiti

TEOR Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un p.to di acc. dell'insieme $A \subset \mathbb{R}$ e siano $f, g : A \to \mathbb{R}$ due funzioni. Supponiamo che esistano (finiti) i limiti

$$L = \lim_{x \to x_0} f(x) \qquad M = \lim_{x \to x_0} g(x), \qquad L, M \in \mathbb{R}.$$

Allora:

(1) Esiste $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \left(f(x) + g(x)\right) = L + M$

(2) Esiste $\displaystyle\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = L \cdot M$

(3) Se $M \neq 0$ allora esiste $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$.

Dim. Verifico (1). Fissato $\varepsilon > 0$ esistono $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tali che

$$\begin{matrix} 0 < |x - x_0| < \delta_1 \\ x \in A \end{matrix} \implies |f(x) - L| < \varepsilon/2$$

$$\begin{matrix} 0 < |x - x_0| < \delta_2 \\ x \in A \end{matrix} \implies |g(x) - M| < \varepsilon/2$$

Ma allora scegliendo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ avremo:

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) + g(x) - (L + M)| =$$

$$= |f(x) - L + g(x) - M| \leq$$

$$\leq \underbrace{|f(x) - L|}_{<\,\varepsilon/2} + \underbrace{|g(x) - M|}_{<\,\varepsilon/2} < \varepsilon \qquad \square$$

## Osservazioni

(1) Il teor. precedente vale anche per $x_0 = \pm\infty$

(2) Il punto 1) vale anche con $L = \pm\infty$ e $M \in \mathbb{R}$ con la regola che

$$\pm\infty + M = \pm\infty$$

(3) Il punto 2) vale anche con $L = \pm\infty$ ed $M \neq 0$ con la regola che

$$\pm\infty \cdot M = \begin{cases} \pm\infty & \text{se } M > 0 \\ \mp\infty & \text{se } M < 0 \end{cases}.$$

(4) Se $f$ è limitata e $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ allora

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = 0 \qquad \underset{\text{infinitesimo}}{\underset{\parallel}{\text{limitato} \cdot \text{infinitesimo}}}$$

(5) Infine si ha che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \iff \lim_{x \to x_0} |f(x)| = 0 .$$

Esempio (Limiti fondamentali

(1) Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ un parametro fissato. Allora:

$$\lim_{x \to 0} |x|^{\alpha} = \begin{cases} 0 & \alpha > 0 \\ 1 & \alpha = 0 \\ +\infty & \alpha < 0 \end{cases}$$

(2) $\alpha \in \mathbb{R}$. Avremo:

$$\lim_{x \to \infty} x^{\alpha} = \begin{cases} +\infty & \alpha > 0 \\ 1 & \alpha = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to \infty} x^{\alpha} = \begin{cases} +\infty & \alpha > 0 \\ 1 & \alpha = 0 \\ 0 & \alpha < 0 \end{cases}$$

(3) Sia ora $a > 0$ una base. Allora avremo:

$$\lim_{x \to \infty} a^{x} = \begin{cases} +\infty & a > 1 \\ 1 & a = 1 \\ 0 & 0 < a < 1 \end{cases}$$

(4) Sia ora $a > 1$ una base per i logaritmi

$$\lim_{x \to \infty} \log_a x = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty .$$

Teorema (del Confronto) Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un p.to di acc. di un insieme $A \subset \mathbb{R}$ e siano $f, g, h : A \to \mathbb{R}$ funzioni tali che

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \qquad \forall x \in A .$$

Se esistono (finiti o $\pm\infty$) e sono uguali i limiti

$$L = \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x)$$

allora si ha anche

$$L = \lim_{x \to x_0} g(x) .$$

Limiti trigonometrici

TEOR Si hanno i seguenti limiti notevoli:

(1) $\lim_{x \to 0} \sin x = 0$

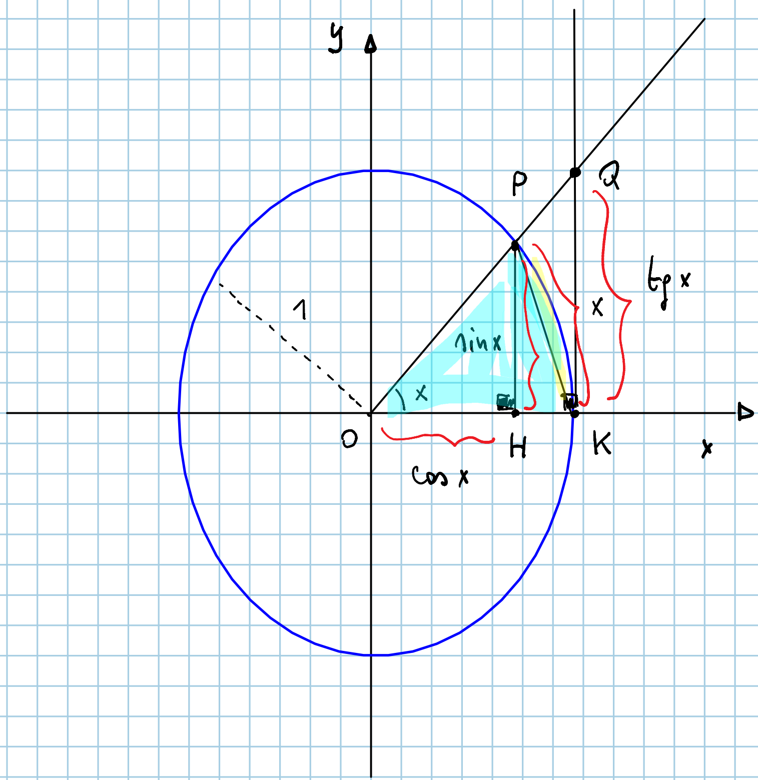
(3) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

(1) $\lim_{x \to 0} \sin x = 0$

(2) $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$

(3) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Dim.




$$\frac{\overline{PH}}{\overline{OH}} = \frac{\overline{QK}}{\overline{OK}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \overline{QK}$$

$\overset{\triangle}{POK} \subset \overset{\frown}{POK} \subset \overset{\triangle}{QOK}$

$\Downarrow$

$$\text{Area}(\overset{\triangle}{POK}) \le \text{Area}(\overset{\frown}{POK}) \le \text{Area}(\overset{\triangle}{QOK})$$

$$\text{Area}(\overset{\triangle}{POK}) = \overline{OK} \cdot \overline{HP} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sin x$$

$$\text{Area}(\overset{\frown}{POK}) = \frac{x}{2}$$

$$\text{Area}(\overset{\triangle}{QOK}) = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x$$

Quindi ho scoperto che $(0 < x < \pi/2)$

$$\frac{1}{2} \sin x \le \frac{1}{2} x \le \frac{1}{2} \operatorname{tg} x$$

$$\Updownarrow$$

$$\sin x \le x \le \frac{\sin x}{\cos x} \quad . \quad \frac{\sin x}{x} \le 1$$

$$\sin x \le x \le \frac{\sin x}{\cos x} \quad . \qquad \frac{\sin x}{x} \le 1$$

Dalla dis. gialla deduco che

$$0 \le |\sin x| \le |x| \qquad \forall x \qquad \cos x \le \frac{\sin x}{x}$$

Per confronto deduco che

$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0$$

Poi osservo che

$$\underbrace{0 \le 1 - \cos x}_{\downarrow\ \text{Confronto}\ \downarrow\ 0} = \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x} = \frac{\sin^2 x}{1+\cos x} \le \sin^2 x \xrightarrow{x \to 0} 0$$

$\cos x \ge 0$ per $x$ vicino a 0

Ho provato che $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$.

Dal rettangolo azzurro trovo

$$\cos x \le \frac{\sin x}{x} \le 1 \qquad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos x \xrightarrow{x \to 0} 1 \qquad \frac{\sin x}{x} \xrightarrow{x \to 0} 1 \qquad 1 \to 1$$

Per confronto deduco che

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Esempio Calcolare il limite:

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{tg(x)\ (1-\cos x)}{x^3}$$

$\sin^2 x$

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{\qquad}{x^3}$$

Ho

$$\frac{\frac{\sin x}{\cos x}(1-\cos x)}{x^3} \cdot \frac{(1+\cos x)}{(1+\cos x)} = \frac{\sin x \, \overbrace{(1-\cos^2 x)}^{\sin^2 x}}{x^3 \cos x \, (1+\cos x)} =$$

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 \frac{1}{\cos x \, (1+\cos x)} \xrightarrow[x \to 0]{} 1^3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad L = 1/2$$

## FORME INDETERMINATE

Le forme indeterminate sono:

$$[\infty - \infty], \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right], \quad [1^\infty], \quad [0 \cdot \infty], \quad \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$[0^0], \quad [\infty^0]$$

**TEOR** Valgono i seguenti limiti:

(1) $$\lim_{x \to \infty} \frac{x^\beta}{a^x} = 0 \qquad \beta > 0, \quad a > 1$$

(2) $$\lim_{x \to \infty} \frac{(\log_a x)^\beta}{x^\alpha} = 0 \qquad a > 1, \quad \beta > 0, \quad \alpha > 0$$

Dim. Verifico il limite (2) con una tecnica di sostituzione:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(\log_a x)^\beta}{x^\alpha} = \lim_{y \to \infty} \frac{y^\beta}{(a^y)^\alpha} =$$

$$y = \log_a x$$

$$x \to \infty \Rightarrow y = \log_a x \to \infty$$

$$\Updownarrow$$

$$(a^y)^\alpha = a^{\alpha y} = (a^\alpha)^y \qquad a^y = a^{\log_a x} = x$$

$$= \lim_{y \to \infty} \frac{y^\beta}{(a^\alpha)^y} = 0 .$$

dove $a^\alpha > 1$ perché $a > 1$ $\alpha > 0$

$\square$

**Esercizio** Calcolare per ogni $\beta > 0$ il seg. limite

$$L = \lim_{x \to 0^+} x^\beta \log x = ?$$

Sostituzione : $-\log x = y$ $\quad x \to 0 \Rightarrow y = -\log x \to +\infty$

$$L = \lim_{y \to +\infty} (-y) \cdot (e^{-y})^\beta =$$

$$-\log x = y \iff \log x = -y \iff x = e^{\log x} = e^{-y}$$

$$L = \lim_{y \to +\infty} - \frac{y}{(e^\beta)^y} = 0 \quad \forall \beta > 0 .$$

$$e^\beta > 1$$

**Esercizio** Calcolare il seguente limite:

$$L = \lim \ \log_2 (e^x + x^2) \ \ldots = [\infty]$$

$$L = \lim_{x \to \infty} \frac{\log_2 (e^x + x^2)}{x + \sin x + \log_2 x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

Sol.

$$L = \lim_{x \to \infty} \frac{\log_2 \left[ e^x \left( 1 + \frac{x^2}{e^x} \right) \right]}{x \left( 1 + \frac{\sin x}{x} + \frac{\log_2 x}{x} \right)}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{x} \left[ \log_2 e + \frac{1}{x} \log_2 \left( 1 + \frac{x^2}{e^x} \right) \right]}{\cancel{x} \left( 1 + \frac{\sin x}{x} + \frac{\log_2 x}{x} \right)}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = 0 \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{\log_2 x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \to \infty} \log_2 \left( 1 + \frac{x^2}{e^x} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \cdot \log_2 \left( 1 + \frac{x^2}{e^x} \right) = 0$$

Conclusione

$$L = \lim_{x \to \infty} \ldots = \frac{\log_2 e + 0}{1 + 0 + 0} = \log_2 e.$$

$\square$

<u>Esercizio</u> Calcolare il seguente limite:

$$L = \lim_{x \to \infty} \frac{x^{2x} + |\sin x|^{x^2}}{\left( 2^{x \log x} + e^x \right)^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$N(x) = x^{2x} + |\sin x|^{x^2} = \left( x^{2x} \right) \left( 1 + \frac{|\sin x|^{x^2}}{\ldots} \right)$$

dove $\lim_{x \to \infty} \frac{|\sin x|^{x^2}}{x^{2x}} = 0$ limitata · infinitesimo.

È dominante

$D(x) = (2^{x \log x} + e^x)^2$

$2^{x \log x} = (2^{\log x})^x \gg e^x$

$D(x) =$