Lezione 21

venerdì 14 novembre 2014
10:08

FUNZIONI CONTINUE

Correggere

DEF (Limiti destro e sinistro) Siano $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ un p.to di accumulazione di A ed $f: A \to \mathbb{R}$ una funzione.

(1) Diciamo che

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L^+ \in \mathbb{R}$$

se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tale che

$$x \in A \cap (x_0, x_0 + \delta) \implies |f(x) - L^+| < \varepsilon$$

(2) Diciamo che

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L^- \in \mathbb{R}$$

se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tale che

$$x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0) \implies |f(x) - L^-| < \varepsilon .$$

DEF (Funzione continua). Siano $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ ed $f: A \to \mathbb{R}$ una funzione.

(1) f si dice continua in x_0 se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tale che

$$x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon .$$

x_0 incluso

(2) f si dice continua su A se è continua in tutti i punti $x_0 \in A$.

TEOREMA Sia $f: A \to \mathbb{R}$ una funzione e $x_0 \in A$.

Allora sono equivalenti le seguenti 4 affermazioni:

(1) f è continua nel punto x_0

(2) $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

(3) $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

(4) Per ogni successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ contenuta in A e tale che $x_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} x_0$ $\left(\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \right)$ si ha

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0).$$

(Teorema Ponte o Caratterizzazione sequenziale della Continuità)

Dim. Omessa

Osservazione su (4) Il punto (4) si riscrive così:

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \to \infty} x_n \right).$$

se f è continua

TEOR Somma, prodotto e quoziente f/g con $g \neq 0$ di funz. cont. è ancora una funz. cont.

Dim. Segue dall'analogo teorema sui limiti

TEOR Le funzioni x^α, $\sin x$, $\cos x$ e e^x sono continue nel loro dominio.

Dim. Provo che $\sin x$ è cont. su tutto $\mathbb{R}$.

Sappiamo che (GIÀ provato)

$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0 = \sin(0)$$

Prendiamo ora un $x_0 \in \mathbb{R}$ generico

$$\lim_{x \to x_0} \sin x = \lim_{x \to 0} \sin(x_0 + x)$$

$$= \lim_{x \to 0} \sin(x_0) \cos(x) + \sin(x) \cos(x_0)$$

$\downarrow 1$ già provato $\nearrow 0$

$$= \sin(x_0) \cdot 1 + 0 \cdot \cos(x_0) = \sin(x_0).$$

Proviamo che e^x è cont. in tutto $\mathbb{R}$.
Prima verifico la cont. in $x_0 = 0$. Cioè
devo provare che

$$\lim_{x \to 0} e^x = e^0 = 1$$

Sappiamo già che

Noto

$$\lim_{n \to \infty} e^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{e} = 1$$

Inoltre sappiamo che e^x è crescente.
Dunque Fissato $\varepsilon > 0$ $\exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq \bar{n}$

$$1 < e^{1/n} = \sqrt[n]{e} < 1 + \varepsilon$$

Quindi se scelgo $\delta = 1/\bar{n}$ e prendo $\underset{x>0}{0 < x < \delta} = 1/\bar{n}$
allora

$$0 < e^x - 1 \leq e^{1/\bar{n}} - 1 < \varepsilon$$

Ho provato che $\lim_{x \to 0^+} e^x = 1$ Fine.

Poi in un generico $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to x_0} e^x = \lim_{x \to 0} e^{x_0 + x} = \lim_{x \to 0} e^{x_0} \cdot e^x$$

$$= e^{x_0} \cdot 1 = e^{x_0}.$$

$= e^{x_0} \cdot 1 = e^{x_0}$. $\square$

<u>Teorema (degli zeri)</u> Siano $A = [a, b]$ un intervallo e sia $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che

$$f(a) < 0 \quad e \quad f(b) > 0.$$

Allora esiste almeno un p.to $x \in (a, b)$ tale che

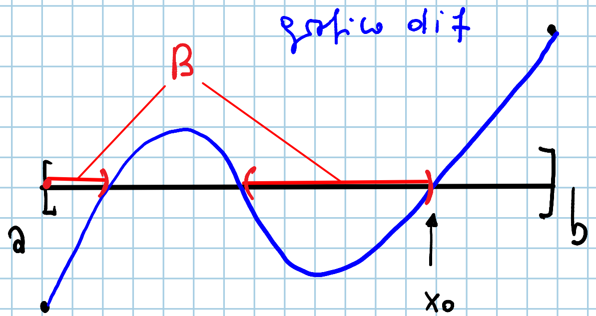
$$f(x) = 0.$$

Dim. Certamente esiste $\delta > 0$ tale che

$$f(x) < 0 \quad \text{per} \quad x \in [a, a+\delta],$$
$$f(x) > 0 \quad \text{per} \quad x \in [b-\delta, b].$$

Definiamo l'insieme

$$B = \{ x \in A = [a, b] : f(x) < 0 \} \neq \emptyset$$



Per l'Assioma di completezza esiste

$$x_0 = \sup B \in \mathbb{R}$$

Da quanto detto sopra $x_0 \geq a + \delta$ e $x_0 \leq b - \delta$.
Adesso proviamo che

$$f(x_0) = 0.$$

Siccome $f(x) \geq 0 \quad \forall x \geq x_0 = \sup \{ x \in [a, b] : f(x) < 0 \}$
dunque per permanenza del segno

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) \geq 0 .$$

Andiamo a vedere il lim. sinistro.

Dalla def. di estremo sup. esistono punti $x_n \in B$ tali che

$$x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x_0$$

Per la Caratt. (4) della cont.

$$f(x_0) \underset{\text{cont.}}{=} \lim_{n \to \infty} f(x_n) \leq 0 \qquad f(x_n) < 0 \ \forall n$$

Segue che $f(x_0) = 0$.

$\square$

TEOR (dei valori intermedi) Sia $f : A = [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua (intervallo) e sia $y \in \mathbb{R}$ tale che

$$\inf_A f < y < \sup_A f .$$

Allora esiste $x \in [a,b] = A$ tale che

$$f(x) = y .$$

Dim. Per la def. di $\inf_A f$ e $\sup_A f$ esistono due punti $x_0, x_1 \in A$ tali che

$$\inf_A f \leq f(x_0) < y < f(x_1) \leq \sup_A f$$

Guardo la funzione $g(x) = f(x) - y$ sull'intervallo $[x_0, x_1]$.
Lei è cont. Inoltre

$$g(x_0) = f(x_0) - y < 0$$

$$g(x_1) = f(x_1) - y > 0$$

Quindi per il Teor. degli zeri esiste $x \in [x_0, x_1]$ tale che $g(x) = 0$ ovvero

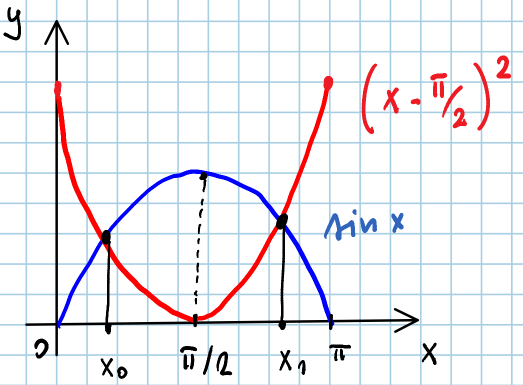
$$f(x) = y. \qquad \square$$

<u>Esercizio</u> Verificare che l'equazione

$$\sin x = \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2, \qquad x \in [0, \pi]$$

ha esattamente due soluzioni nell'intervallo $[0, \pi]$.

Soluzione. Disegno:



Considero l'intervallo $[0, \pi/2]$ e la funzione

$$f(x) = \sin x - (x - \pi/2)^2 \qquad x \in [0, \pi/2]$$

È una funzione continua.

Agli estremi si ha:

$$f(0) = \sin 0 - \frac{\pi^2}{4} = -\frac{\pi^2}{4} < 0$$

$$f(\pi/2) = \sin \pi/2 - 0 = 1 > 0$$

Per il Teor. degli zeri esiste $x_0 \in (0, \pi/2)$ tale che

$$f(x_0) = 0$$

Osservo poi che

$x \mapsto \sin x$ è <u>strett</u> crescente in $[0, \pi/2]$

inoltre

$$x \mapsto -\left(x - \pi/2\right)^2 \text{ è strett. crescente su } [0, \pi/2]$$

Quindi f è strett. crescente su $[0, \pi/2]$

Quindi il punto di zero x_0 è unico in $[0, \pi/2]$

Per simmetria ci sarà un unico $x_1 \in (\pi/2, \pi)$ tale che $f(x_1) = 0$.

$\square$

<u>TEOR (Cont. della funzione composta)</u> Sia $f : A \to B$ una funzione cont. su A e sia $g : B \to C$ una funzione continua su B. Allora la funzione composta

$$g \circ f : A \longrightarrow C$$

è continua su tutto il suo dominio A.

Dim. Provo che $g \circ f$ è cont. nel generico p.to $x_0 \in A$. Fissato $\varepsilon > 0$. Siccome per ipotesi g è cont. nel punto $y_0 = f(x_0) \in B$ allora esiste $\eta > 0$ tale che

$$|y - \overset{f(x_0)}{y_0}| < \eta \implies |g(y) - \underset{\substack{\| \\ g(f(x_0)) \\ \| \\ g \circ f(x_0)}}{g(y_0)}| < \varepsilon .$$

Ora, siccome f è continua in $x_0 \in A$, allora in corrispondenza dell'η sopra esiste $\delta > 0$ tale che

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \eta$$

Metto insieme questi fatti e deduco che

$$|x - x_0| < \delta \implies |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon .$$

$\square$

intervallo

□

intervallo

TEOR Sia $A = [a,b]$ e sia $f: A \to \mathbb{R}$ una funz. continua e iniettiva. Allora:

(i) f è strett. monotòna

(ii) L'immagine $f(A) \subset \mathbb{R}$ è un intervallo

(iii) La funzione inversa $f^{-1}: f(A) \to A$ è continua.

Dim. Omessa

Corollario Le funzioni $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg}(x)$, $\log_a x$ sono continue nel loro dominio.

Esercizio Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita così:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha \cos x + \log(\beta + x^2) & x < 0 \\ \sqrt{x} + \beta x & 0 \leq x \leq 1 \\ x^3 + e^{\alpha x} & x > 1 \end{cases}$$

Determinare tutti i valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ t.c. che f sia cont. su tutto $\mathbb{R}$.

Sol. Attenzione: deve essere $\beta + x^2 > 0 \quad \forall x < 0$
Quindi deve essere $\beta \geq 0$.

Dobbiamo imporre la continuità nei p.ti di raccordo $x = 0$ e $x = 1$
(Altrove f è certamente continua).

Quindi dobbiamo imporre: