Lezione 23

giovedì 20 novembre 2014
14:12

Operazioni con le derivate

TEOR Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili nell'intervallo aperto A. Allora $\forall x \in A$:

(1) $D(f+g)(x) = Df(x) + Dg(x)$.

(2) $D(f \cdot g)(x) = f(x)\, Dg(x) + g(x)\, Df(x)$.

(3) Se $g \neq 0$ in A allora

$$D\left(\frac{1}{g}\right)(x) = -\frac{Dg(x)}{g(x)^2}.$$

(4) Se $g \neq 0$ in A allora

$$D\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{g(x)\, Df(x) - f(x)\, Dg(x)}{g(x)^2}.$$

Dim Verifico (2). Fissato $x \in A$

$$D(f \cdot g)(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)\, g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)\, g(x+h) - f(x) \cdot g(x+h) + f(x)\, g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \underbrace{g(x+h)}_{\substack{\downarrow h \to 0 \\ g(x)}} \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{\substack{\downarrow \\ f'(x)}} + f(x) \underbrace{\frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{\substack{\downarrow h \to 0 \\ g'(x)}}$$

g è cont.

$$= g(x)\, f'(x) + f(x)\, g'(x).$$

(3)

$$D\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{f(x)}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x) - f(x+h)}{h\, f(x)\, f(x+h)}$$

$$= - \lim_{h\to 0} \frac{1}{f(x)\, f(x+h)} \; \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= - \frac{1}{f(x)^2} \cdot f'(x)$$

La (4) deriva da (2) + (3)

$$D\left(\frac{f}{g}\right) = D\left(f \cdot \frac{1}{g}\right) = f\, D\left(\frac{1}{g}\right) + \frac{1}{g}\, Df$$

$\square$

ES 1

$$D\, tg(x) = D\, \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x\, D(\sin x) - \sin x \cdot D(\cos x)}{(\cos x)^2} =$$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x\, (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} \qquad (\cos x \neq 0)$$

ES 2 Voglio provare che $D\, x^n = n \cdot x^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, Verifico per induzione su n.

- $n=1$ $\quad Dx = 1$. Fine

- Supponiamo vera la formula per n e proviamola per $n+1$:

Regola prodotto

$$D\,x^{n+1} = D\,(x \cdot x^n) = (Dx)\cdot x^n + x \cdot D(x^n)$$

$$= x^n + x \cdot n\,x^{n-1} = x^n + n\,x^n = (n+1)\,x^n .$$

Ipotesi Induttiva

Derivata della funzione composta e della funzione inversa.

TEOR1 Siano $f: A \to B$ e $g: B \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili nei loro domini. Allora la funzione composta $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ è derivabile in A ed inoltre

$$D\,(g\circ f)\,(x) = Dg\,(f(x)) \cdot Df\,(x)$$

$$(g \circ f)'\,(x) = g'\,(f(x)) \cdot f'(x) .$$

Dim. Verifichiamo la formula nel punto $x_0 \in A$.

Definiamo la funzione ausiliaria $h: B \to \mathbb{R}$

$$h(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y) - g(f(x_0))}{y - f(x_0)} & y \neq f(x_0) \\[2ex] g'(f(x_0)) & y = f(x_0) \end{cases}$$

Osservo che h è continua nel p.to $y = f(x_0)$.

Ora per $x \neq x_0$ formo il seg. Rapporto incrementale:

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = h(f(x)) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

verifico

$$x - x_0 \qquad\qquad x - x_0$$

verifica

$$g'(f(x_0)) \quad = \quad \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{\cancel{f(x) - f(x_0)}} \cdot \frac{\cancel{f(x) - f(x_0)}}{x - x_0}$$

$$D(g \circ f)(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = f'(x_0) \cdot g'(f(x_0))$$

$$f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} f(x_0)$$

$$h(f(x)) \xrightarrow[x \to x_0]{} h(f(x_0))$$

ES 1 Calcolare la derivata di $f(x) = \log(\log(1+x^2))$

$$D f(x) = f'(x) = \frac{1}{\log(1+x^2)} \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x \; .$$

ES 2 Voglio verificare che $\forall \alpha > 0 : \; D x^\alpha = \alpha x^{\alpha - 1}$

Verifica:

$$D x^\alpha = D\left(e^{\log x^\alpha}\right) = D\left(e^{\alpha \log x}\right)$$

$$= e^{\alpha \log x} D(\alpha \log x)$$

$$= e^{\alpha \log x} \alpha \frac{1}{x} = e^{\log x^\alpha} \cdot \alpha \cdot x^{-1}$$

$$= x^\alpha \cdot \alpha \cdot x^{-1} = \alpha x^{\alpha - 1} .$$

TEOR 2 Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile e iniettiva

TEOR 2 Sia $f: A \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile e iniettiva nell'intervallo $A = (a, b)$. Supponiamo che $f'(x) \neq 0$ $\forall x \in A$. Allora la funzione inversa $f^{-1}: f(A) \to A$ è derivabile in $f(A)$ ed inoltre la derivata di f^{-1} nel punto $y = f(x)$ è

$$D f^{-1}(y) = \frac{1}{D f(x)} \quad \text{dove } y = f(x).$$

Dim. Calcoliamo la derivata di f^{-1} nel punto $y_0 = f(x_0)$ con $x_0 \in A$:

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \circledast$$

Facciamo la seguente sostituzione $y = f(x)$ con $x \in A$
$y_0 = f(x_0)$

ovvero $x = f^{-1}(y)$ e $x_0 = f^{-1}(y_0)$.

$$y \to y_0 \implies \underset{\substack{\| \\ x}}{f^{-1}(y)} \to \underset{\substack{\| \\ x_0}}{f^{-1}(y_0)} \quad \text{perché } f^{-1} \text{ è continua in } y_0$$

$$\circledast = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

$$= \frac{1}{D f(x_0)} \quad \text{con } D f(x_0) = f'(x_0) \neq 0$$

$\square$

ES Derivata della funzione arcsin

Voglio verificare che

$$D \arcsin(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \qquad -1 < y < 1$$

Prova Sia $y \in (-1,1)$ e sia $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ dove inverto sin
ho che $y = \sin x$

$$D \arcsin(y) = \frac{1}{D \sin(x)} = \frac{1}{\cos x} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \qquad y \neq \pm 1$$

ES 2 $\quad D \arccos y = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}} \qquad -1 < y < 1$

ES 3 Voglio verificare che

$$D \operatorname{arctg}(y) = \frac{1}{1+y^2} \qquad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Conto. Siano y ed x legati dalla relazione $y = \operatorname{tg} x$

$$D \operatorname{arctg}(y) = \frac{1}{D \operatorname{tg}(x)} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \cos^2 x =$$

$$= \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x + 1} = \frac{1}{1+y^2}.$$

ESERCIZIO Determinare tutti i valori di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che la funzione $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} (\alpha+1)\arcsin x - 6(\beta+3)\sin x & x \in [-1,0] \\ 2\alpha(x^4+x) - (\beta+3)(\sqrt{x} + \operatorname{tg} x) & x \in (0,1] \end{cases}$$

sia derivabile nel punto $x = 0$.

Soluzione. Deve esistere finito il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$$

Ovvero devono esistere ed essere uguali i limiti destro e sinistro.

$$L^- = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x}\left((\alpha+1)\arcsin x - \overset{6}{}(\beta+3)\sin x\right)$$

$$= \lim_{x \to 0^-} (\alpha+1)\underbrace{\frac{\arcsin x}{x}}_{\to 1} - 6(\beta+3)\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1}$$

$$= (\alpha+1) - 6(\beta+3)$$

$$L^+ = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x}\left(2\alpha(x^4+x) - (\beta+3)(\sqrt{x} + \operatorname{tg} x)\right)$$

$$= \lim_{x \to 0^+} 2\alpha(x^3+1) - (\beta+3)\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}\right)$$

$x \to 0^+$

$\downarrow$

2α

$\times \quad \cos x$

$\downarrow$

1

Per avere limite FINITO deve essere $\beta + 3 = 0$.
In questo caso il limite è

$$L^+ = 2\alpha$$

$$L^- = \alpha + 1 - 6(\beta+3) = \alpha + 1$$

Devo imporre $L^- = L^+$

$$\alpha + 1 = 2\alpha \iff \alpha = 1$$

Unica soluzione: $\alpha = 1$ e $\beta = -3$.

$\square$

Prossimi argomenti:

- p.to critico $f'(x_0) = 0$
- f cresce $\iff f' \geq 0$
- p.ti di estremo sono p.ti critici
- Teorema Weierstrass: Le funzioni continue assumono valore max e min
- Rolle $\to$ Cauchy $\to$ Lagrange $\to$ Hospital
- Teorema di Taylor negli sviluppi di funzioni

Punti critici e Punti di estremo locale

DEF Siano $A \subset \mathbb{R}$ un insieme ed $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione.

(1) Un punto $x_0 \in A$ si dice punto di minimo locale di f se esiste $\delta > 0$ tale che

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in A \cap I_\delta(x_0)$$

Poi x_0 si dice p.to di min locale stretto se

$$f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in A \cap I_\delta(x_0) \quad x \neq x_0$$

(2) Un p.to $x_0 \in A$ si dice p.to di max locale di f se esiste $\delta > 0$ tale che

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in A \cap I_\delta(x_0)$$

Poi x_0 si dice ... stretto se ...

$$f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in A \cap I_\delta(x_0) \quad x \neq x_0,$$

(3) Un p.to $x_0 \in A$ si dice p.to di estremo locale se è un p.to di min oppure di max locale.