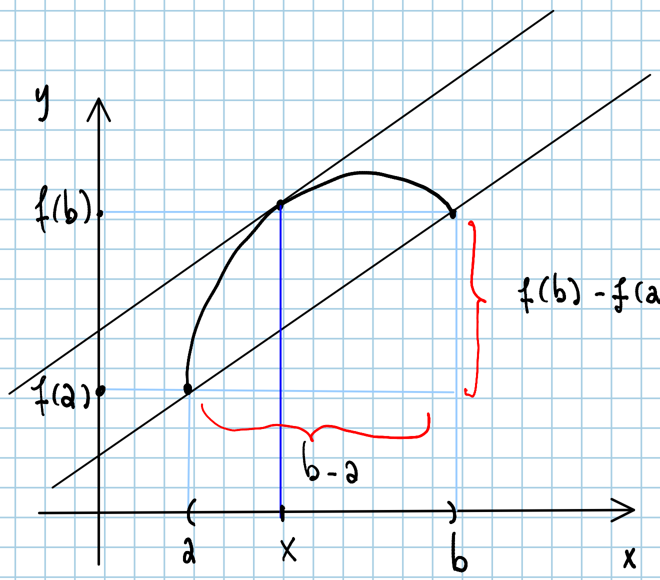
Lezione 25

lunedì 24 novembre 2014
10:09

Teorema Lagrange: Esiste $x \in (a,b)$ tale che

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x)$$



Teorema (di Cauchy) Siano $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ due funzioni continue in $[a,b]$ e derivabili in (a,b).
Supponiamo che $g(b) \neq g(a)$.
Allora esiste un punto $x \in (a,b)$ tale che

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Dim. Consideriamo la funz. ausiliaria

$$h(x) = g(x)\big(f(b)-f(a)\big) - f(x)\big(g(b)-g(a)\big)$$

- h è cont. in $[a,b]$
- h è deriv in (a,b)
- $h(a) = g(a)\big(f(b)-f(a)\big) - f(a)\big(g(b)-g(a)\big)$

$$= g(a)f(b) - f(a)g(b)$$

$$= g(a)\,f(b) - f(a)\,g(b)$$

- $$h(b) = g(b)\big(f(b) - f(a)\big) - f(b)\big(g(b) - g(a)\big)$$
$$= -g(b)\,f(a) + f(b)\,g(a)$$

Quindi $h(a) = h(b)$. Per Rolle esiste $x \in (a,b)$ tale che
$$h'(x) = 0$$
$$0 = h'(x) = g'(x)\big(f(b) - f(a)\big) - f'(x)\big(g(b) - g(a)\big)$$

Trovo la tesi. $\square$

<u>COROLLARIO</u> Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile sull'intervallo (a,b) tale che $f'(x) = 0$ per ogni $x \in (a,b)$. Allora f è costante.

Dim. Presi $x_1, x_2 \in (a,b)$, per Lagrange esiste $\bar{x}$ fra x_1 e x_2 tale che
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\bar{x}) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$f(x_2) = f(x_1) \quad \forall\, x_1, x_2 \in (a,b)$$

Quindi f è costante.

<u>Esercizio</u> Verificare che $f(x) = \arcsin x + \arccos x$ è costante nel suo dominio.

<u>Esercizio</u> Si consideri la funzione $f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \operatorname{arctg}(x) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \neq 0.$$

Provare che f è costante su ciascuna delle due semirette $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$. Calcolare le due costanti.

Sol. Derivata di f

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0 \quad \forall x \neq 0.$$

Per il Teor. di Lagr. f è costante in ciascuno dei due intervalli $(-\infty, 0)$ e $(0, \infty)$.

- Per $x > 0$ $\quad \operatorname{arctg}(x) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) = \text{costante}_+$

  Con $x = 1$ trovo $\text{costante}_+ = \pi/2$

- Per $x < 0$ $\quad \operatorname{arctg}(x) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) = \text{costante}_-$

  Con $x = -1$ trovo $\text{costante}_- = -\pi/2$

$\square$

<u>Derivata ed intervalli di monotonia</u>

TEOR. Sia $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile nell'intervallo (a, b). Allora:

(1) f è crescente nell'intervallo (a, b) $\iff$ $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b)$.

(2) Se $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ è strettamente crescente nell'intervallo (a,b)

Dim. Verifico (1)

Supponiamo che f sia crescente in (a,b). Allora preso $x \in (a,b)$ e $h > 0$ incremento avremo

$$f'(x) = \underbrace{\lim_{h \to 0^+} \frac{\overbrace{f(x+h) - f(x)}^{\geq 0}}{h}}_{\geq 0 \ \forall h > 0} \geq 0$$

si Ho trovato $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b)$.

Supponiamo ora che sia $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b)$. Presi $x_1, x_2 \in (a,b)$ con $x_1 < x_2$ allora per il Teorema di Lagrange esiste $x_1 < x < x_2$ tale che

$$f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(x)}_{\geq 0} \cdot \underbrace{(x_2 - x_1)}_{> 0} \geq 0$$

$$\Downarrow$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

□

Esercizio Sia data la funzione

$$f(x) = (x^2 + 2x - 3)\, e^{x^2 + 2x}, \qquad x \in [-1,1]$$

calcolare i punti di max e min (assoluti e relativi) della funzione f nell'intervallo $[-1,1]$.

Sol. • $[-1,1]$ è int. chiuso e limitato
f è continua in $[-1,1]$ } $\xRightarrow{\text{Teor. W.}}$ Esiste il valore max di f
Esiste il valore min di f

- f è derivabile in tutto $[-1,1]$

  - Calcolo la derivata
  - Trovo i p.ti critici dove $f'(x)=0$
  - cerco p.ti di max\min locale, fra i p.ti critici interni, dentro $(-1,1)$
  - Studio la monotonia tramite il segno di f'
  - Faccio attenzione agli estremi $x=-1$ e $x=+1$ del dominio

Conti:

- Derivata:

$$f'(x) = (2x+2)\, e^{x^2+2x} + (x^2+2x-3)\, e^{x^2+2x} \cdot (2x+2)$$

$$= (2x+2)\, e^{x^2+2x} \left[1 + x^2+2x-3 \right]$$

$$= (2x+2)(x^2+2x-2)\, e^{x^2+2x}$$

- Punti critici

$x \in [-1,1]$

$$f'(x) = 0 \iff (2x+2)(x^2+2x-2) = 0$$

$$\iff \begin{array}{l} 2(x+1) = 0 \\ \text{oppure} \\ x^2+2x-2=0 \end{array} \quad \text{unione soluzioni}$$

Quindi $x+1=0 \iff x=-1$ è un p.to critico (agli estremi del dominio)

Risolvo

$$x^2+2x-2=0 \iff x_\pm = \frac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 \cdot 3}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}$$

Ma $-1-\sqrt{3} < -1$ è fuori dal dominio

Esamino sí

Ma $-1-\sqrt{3} < -1$ è fuori dal dominio

Esamino

sì

$$-1+\sqrt{3} \leq 1 \iff \sqrt{3} \leq 2 \iff 3 \leq 4$$

Dunque $x = \sqrt{3}-1$ è un p.to critico interno in $[-1,1]$.

• Segno di $f'(x)$

$$f'(x) \geq 0 \iff 2(x+1)(x^2+2x-2) \geq 0$$

□ $x+1 \geq 0 \iff x \geq -1$ (sempre nel dominio $[-1,1]$)

(unione soluzioni)

□ $x^2+2x-2 \geq 0 \iff x \leq -1-\sqrt{3}$ oppure $x \geq \sqrt{3}-1$

fuori dal dominio

	-1		0		$\sqrt{3}-1$		$+1$
$x+1$	0	+ + +		+ + +		+ + +	
x^2+2x-2		- - -		- - -	0	+ + +	
$f'(x)$	0	- - -			0	+ + +	
$f(x)$		$\downarrow$				$\uparrow$	

Deduco che $x = \sqrt{3}-1$ è un p.to. di min assoluto e è l'unico.

Deduco anche che il p.to di max assoluto deve essere $x = -1$ oppure $x = +1$

Conti

$$f(-1) = (1-2-3)\cdot e^{1-2} = -4e^{-1} < 0$$

$$f(1) = (1+2-3)\cdot e^{\cdots} = 0$$

Dunque $x = +1$ è l'unico p.to di max assoluto e $f(1) = 0$.

Infine $x = -1$ è un p.to di max locale (non assoluto).

$\square$

ES Verificare che

$$\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) > \frac{1}{x+1} \qquad \forall x > 0.$$

Soluz. Non è possibile risolvere direttamente la diseq.

Allora faccio uno studio di funzione.

Definisco

$$f(x) = \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}, \qquad x > 0$$

e cerco di vedere se $f(x) > 0 \quad \forall x > 0$.

- Limiti

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \infty - 1 = +\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0 - 0 = 0$$

- Derivata:

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{(x+1)^2}$$

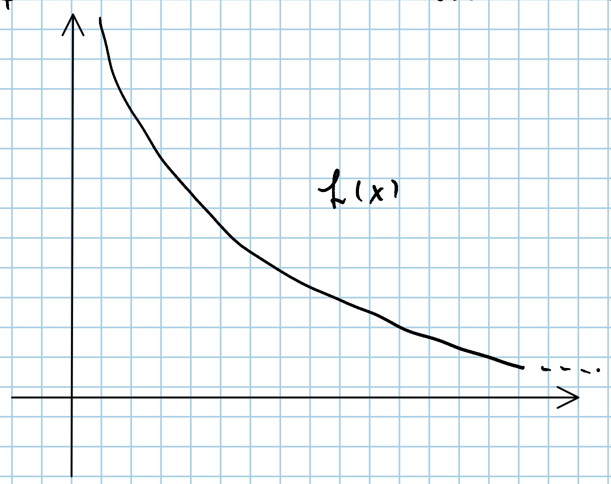
$$= -\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{-(x+1) + x}{x(x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)^2}$$

Dunque $f'(x) < 0 \quad \forall x > 0$.

$$\Downarrow$$

f è strettamente decrescente su $(0, \infty)$.



Deduco che $f(x) > 0 \quad \forall x > 0$.

$\square$

ES Verificare che la seguente funzione

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x, \qquad x > 0$$

è crescente per $x > 0$.

Soluzione. Guardo la funzione

$$g(x) = \log f(x) \iff f(x) = e^{g(x)}$$

Mi basta verificare che g è crescente:

$$g(x) = x \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

Calcolo la derivata

$$g'(x) = \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) + x \, \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{\ldots} > 0$$

$$= \log\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} > 0$$

sì g è crescente $\Rightarrow$ f è crescente. per l'ES. precedente.

$\square$

Oss (1)

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \quad \text{in modo crescente.}$$

(2)

$x = ky \qquad y = x/k$

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{k}{x}\right)^x = \lim_{y\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right]^k = e^k .$$

con $k > 0$

ES. Sia $\alpha \in (0,1]$ (sol $\alpha = 1/3$). Verificare che $\forall\, x, y \geq 0$ si ha:

$$(x+y)^\alpha \leq x^\alpha + y^\alpha .$$

Soluzione. Divido per $y^\alpha \neq 0$

$$\left(\frac{x}{y}+1\right)^\alpha = \left(\frac{x+y}{y}\right)^\alpha \leq \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha + 1$$

Poniamo $t = x/y \geq 0$:

$$(t+1)^\alpha \leq t^\alpha + 1 \qquad \forall\, t \geq 0$$

Faccio lo studio di funzione:

$$f(t) = t^\alpha + 1 - (t+1)^\alpha \qquad t \geq 0$$

Voglio dire che $f(t) \geq 0 \quad \forall\, t \geq 0$.

$$f(0) = 1 - 1 = 0$$

Calcolo la derivata:

$$f'(t) = \alpha t^{\alpha-1} - \alpha (t+1)^{\alpha-1}$$
$$= \alpha \left[t^{\alpha-1} - (t+1)^{\alpha-1} \right]$$

Segno $\quad 1 \geq \alpha > 0$

$$f'(t) \geq 0 \iff t^{\alpha-1} - (t+1)^{\alpha-1} \geq 0$$
$$\iff t^{\alpha-1} \geq (t+1)^{\alpha-1}$$
$$\iff t^{1-\alpha} \leq (1+t)^{1-\alpha} \quad \text{con } 1-\alpha \geq 0$$

sì è verificato $\forall t \geq 0$ perché $1-\alpha \geq 0$

$$\Downarrow$$

$f'(t) \geq 0 \Rightarrow f$ crescente per $t \geq 0$

$$\Downarrow$$

$$f(t) \geq \underset{\substack{\| \\ 0}}{f(0)} \quad \forall t \geq 0 \qquad \square$$