Lezione 29

giovedì 4 dicembre 2014
13:56

TEOREMA (Fondamentale del calcolo)

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e sia $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ la sua funzione integrale. Allora:

(1) F è derivabile in ogni punto $x \in [a,b]$ e inoltre $F'(x) = f(x)$, $x \in [a,b]$. Ovvero F è una primitiva di f.

(2) Per ogni altra primitiva $G \in C^1([a,b])$ di f risulta $F(x) = G(x) - G(a)$ per ogni $x \in [a,b]$. In particolare si ha

$$\left(F(b) = \right) \int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a).$$

Dim (1) Calcolo $F'(x_0)$ nel punto $x_0 \in [a,b]$ usando la definizione:

$$F'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{x - x_0} \left\{ \int_b^x f(t)\,dt - \int_b^{x_0} f(t)\,dt \right\} =$$

Scomposizione del dominio

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \overset{\text{Lemma Media Integrale}}{=} f(\xi(x))$$

Esiste $\xi = \xi(x) \in [x_0, x]$ tale che

Ora: se $x \to x_0 \Rightarrow \xi(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} x_0$.

E siccome f è continua troviamo

$$F'(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(\xi(x)) = f(x_0).$$

(2) Se G è una primitiva allora

$$\left(F(x) - G(x)\right)' = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad \forall x$$

Quindi $F(x) - G(x)$ è costante, ovvero:

$$F(x) - G(x) = F(a) - G(a) \qquad F(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$$

Riordino e trovo

$$F(x) = G(x) - G(a) \qquad \forall x \in [a,b]$$

e con $x = b$ trovo la formula finale

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) = G(b) - G(a).$$

$\square$

Utilizzo del Teorema Fond. del C I

Data f continua su un intervallo si cerca una una qualsiasi primitiva G e si ha allora

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[G(x)\right]_{x=a}^{x=b} = G(b) - G(a).$$

Ad es. $f(x) = 1/x$ ha primitiva $\log|x|$ per $x<0$ opp. $x>0$

e dunque

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \left[\log|x|\right]_{x=1}^{x=2} = \log|2| - \log|1|$$

$$= \log 2$$

Analogamente, $f(x) = \frac{\log|x|}{x}$ ha primitiva $G(x) = \frac{1}{2}\left(\log|x|\right)^2$

e dunque

$$\int_1^2 \frac{\log x}{x}\,dx = \left[\frac{1}{2}\left(\log x\right)^2\right]_{x=1}^{x=2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\log 2\right)^2.$$

Attenzione: É falso scrivere:

$$\int^2 \frac{1}{}\,dx = \left[\log|x|\right]^{x=2} = \log 2 - \log|-1| = \log 2$$

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{x}\,dx \underset{\uparrow}{=} \left[\lg|x| \right]_{x=-1}^{x=2} = \lg 2 - \lg|-1| = \lg 2$$

FALSO

Non è integrabile intorno $x=0$

DEF (Integrale indefinito) L'integrale indefinito di una funzione f (su un intervallo) è una generica primitiva di f che si indica con il simbolo

$$\int f(x)\,dx$$

L'integr. indefinito dipende da una costante additiva.

TABELLA DELLE PRIMITIVE ELEMENTARI

Funzione	Primitiva	Oss.
x^{α}	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\alpha \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\log\lvert x\rvert$	$x<0$ opp. $x>0$
$e^{\alpha x}$	$\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}$	$\alpha \neq 0$
$\cosh x$	$\sinh x$	
$\sinh x$	$\cosh x$	
$\cos x$	$\sin x$	
$\sin x$	$-\cos x$	
$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$	$-\log\lvert\cos x\rvert$	$-\frac{\pi}{2} < x < \pi/2$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$-1<x<1$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x$	

Correggere c'è il segno $-$!!

Integrazione di funzioni razionali

Vogliamo calcolare integrali del tipo

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx \qquad \text{con} \quad f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

funzione razionale

P e Q sono polinomi

ES 1 $\quad Q(x) = x + k$. Allora

- $\displaystyle\int \frac{1}{x+k}\,dx = \log|x+k| + C$ costante

- $\displaystyle\int \frac{x}{x+k}\,dx = \int \frac{x+k-k}{x+k}\,dx = \int \left(1 - \frac{k}{x+k}\right)dx =$

$$= x - k\log|x+k| + C$$

- $\displaystyle\int \frac{x^2}{x+k}\,dx = \int \frac{x^2+kx-kx}{x+k}\,dx = \int \frac{x(x+k)-kx}{x+k}\,dx =$

$$= \int \left(x - \frac{kx}{x+k}\right)dx = \frac{1}{2}x^2 - k \text{ vedi sopra}$$

ES 2 $\quad Q(x) = x^2+1$

- $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \operatorname{arctg} x + C$

- $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C$

- $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx = \int \frac{(x^2+1)-1}{x^2+1}\,dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right)dx =$

$$= x - \operatorname{arctg} x + C$$

- $\displaystyle\int x^3 \quad \int \overbrace{x^3+x}^{x(x^2+1)} - x \quad \int \Big(\quad x \quad \Big)$

$$\bullet \int \frac{x^3}{x^2+1}\,dx = \int \frac{\overbrace{x^3+x}-x}{x^2+1}\,dx = \int \left(x - \frac{x}{x^2+1} \right) dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C \ldots$$

E così via...

<u>ES 3</u>

$$\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx = \log|ax^2+bx+c| + c$$

$$a, b, c \in \mathbb{R}$$

<u>ES 4</u> Sia $P(x) = 1$ e $Q(x) = ax^2+bx+c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

Vogliamo calcolare

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx = ?$$

Discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$.

<u>Caso 1</u> $\Delta < 0 \implies Q(x)$ non ha radici reali.

In questo caso si ha SEMPRE

$$Q(x) = \alpha\left((\beta x + \gamma)^2 + 1 \right)$$

con α, β, γ da determinare. E allora

$$\int \frac{1}{Q(x)}\,dx = \int \frac{1}{\alpha\left((\beta x+\gamma)^2+1\right)}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\alpha\beta}\operatorname{arctg}(\beta x + \gamma) + c$$

Caso 2 $\Delta > 0 \implies Q(x)$ ha due radici distinte.

Si ha sempre

$$Q(x) = a \cdot (x - x_0)(x - x_1) \quad \text{con } x_0, x_1 \text{ radici di } Q$$

E allora

$$\int \frac{1}{Q(x)}\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{(x-x_0)(x-x_1)}\,dx$$

$$= \frac{1}{a(x_0 - x_1)} \log\left|\frac{x - x_0}{x - x_1}\right| + c$$

Si fa con i "fratti semplici"

Caso 3: $\Delta = 0 \Rightarrow Q$ ha una radice doppia:

$$Q(x) = a\,(x - x_0)^2 \qquad x_0 = \text{radice}$$

E allora

$$\int \frac{1}{Q(x)}\,dx = \frac{1}{a}\int (x - x_0)^{-2}\,dx$$

$$= -\frac{1}{a}(x - x_0)^{-1} = -\frac{1}{a(x - x_0)} + c$$

Esempio 1 Calcolare

$$I = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{1 - x^2}\,dx \,.$$

$Q(x) = 1 - x^2$ ha due radici distinte $x = \pm 1$

$$Q(x) = (1 - x)(1 + x)$$

Allora scompongo $1/Q$ in questo modo

$$\frac{1}{1 - x^2} = \frac{A}{1 - x} + \frac{B}{1 + x} \qquad \text{con } A, B \in \mathbb{R} \text{ da determinare}$$

$$A(1 + x) + B(1 - x)$$

$$= \frac{A(1+x) + B(1-x)}{(1-x)(1+x)}$$

$$= \boxed{\frac{A+B+x(A-B)}{1-x^2}}$$

Devo imporre le condizioni

$$\begin{cases} A+B = 1 \\ A-B = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2A = 1 \\ A = B \end{cases} \quad \begin{cases} A = 1/2 \\ B = 1/2 \end{cases}$$

Conclusione

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}}{1-x}\,dx + \int \frac{\frac{1}{2}}{1+x}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2} \log|1-x| + \frac{1}{2} \log|1+x|$$

$$= \frac{1}{2} \log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$ É la primitiva

Dunque

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{1-x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2} \log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right]_{x=-1/2}^{x=1/2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\log\left|\frac{3/2}{1/2}\right| - \log\left|\frac{1/2}{-3/2}\right|\right]$$

$$= \ldots$$

Esempio 2 Calcolare

$$I = \int_{-1/2}^{1} \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$$

Discriminante $\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3 < 0$

La primitiva deve essere di tipo arctg :

$$x^2 + x + 1 = (x + \dots)^2 + \dots$$
$$= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = x^2 + x + \cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{4}} + 1$$
$$= (x + 1/2)^2 + 3/4$$
$$= \frac{3}{4}\left[\frac{4}{3}(x + 1/2)^2 + 1\right]$$
$$= \frac{3}{4}\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right]$$

Quindi:

$$\int_{-1/2}^{1} \frac{1}{x^2 + x + 1}\,dx = \int_{-1/2}^{1} \frac{1}{\frac{3}{4}\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right]}\,dx$$
$$= \frac{4}{3}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]_{x=-1/2}^{x=1}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\dots\right]_{x=-1/2}^{x=1} = \frac{2\sqrt{3}}{9}\pi.$$

Esempio 3 Calcolare

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 3x + 2}\,dx$$

Sol $\Delta = 9 - 8 = 1 > 0$ Radici $x_\pm = \begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases}$

Quindi

$$x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$$

Fratti semplici

$$\frac{1}{} \quad \frac{A}{} \quad \frac{B}{}$$

$$\frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$$

$$= \frac{Ax+2A+Bx+B}{(x+1)(x+2)}$$

Sistema

$$\begin{cases} 2A+B = 1 \\ A+B = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} A = 1 \\ B = -A \end{cases} \quad \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}$$

Quindi
$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+3x+2}\,dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) dx$$

$$= \Big[\log|x+1| - \log|x+2| \Big]_{x=0}^{x=1}$$

$$= \left[\log\left|\frac{x+1}{x+2}\right| \right]_{x=0}^{x=1} = \log\frac{2}{3} - \log\frac{1}{2}$$

$$= \log\frac{4}{3}.$$

Decomposizione in fratti semplici

Siano $P(x)$ e $Q(x)$ due polinomi.
Vogliamo calcolare:
$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx.$$

1° Passo Se grado $P(x) \geq$ grado $Q(x)$ eseguo una divisione fra polinomi:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \underset{q}{S(x)} + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

polinomio Resto della divisione dove ora polinomio quoziente $\quad R(x)$ ha grado $<$ grado $Q(x)$

2° PASSO Sia ora P con grado $<$ grado di Q.

Fattorizziamo $Q(x)$ in un prodotto di fattori semplici irriducibili e poi si procede così:

Sia $Q(x) = x^4 - x^3 = x^3(x-1)$; $P(x) = 1$

I fattori semplici sono x^3 e $x-1$.

Allora decompongo P/Q in questo modo

generico polinomio di grado $3-1=2$

pol. grado 0

$$\frac{1}{x^4-x^3} = \frac{1}{x^3(x-1)} = \frac{A+Bx+Cx^2}{x^3} + \frac{D}{x-1}$$

Con $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ da determinare