Lezione 3

giovedì 9 ottobre 2014
13:51

CAMBIO TUTORATO ?

Ma 16 - 18 $\longrightarrow$ Giovedì 16 - 18

?? ??

ES. Calcolare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'eq.:

$$z^4 = -1$$

Ovvero calcolare le radici quarte di $w = -1$.

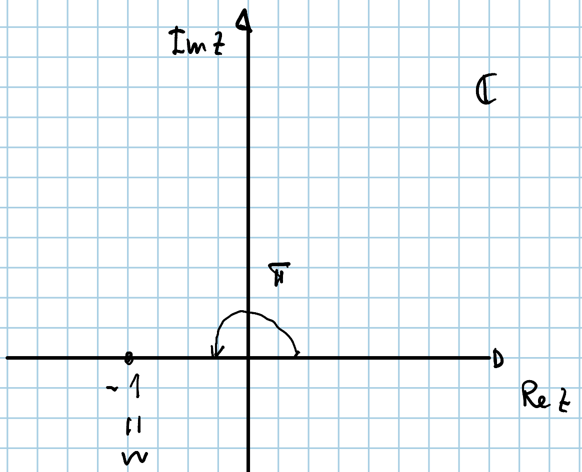
$$|w| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1 \qquad \text{Modulo di } w$$

Argomento

$$\arg(w) = \pi$$

Cioè:

$$-1 = w = e^{i\pi}$$



Cerchiamo le soluzioni

$$z = r\, e^{i\vartheta}$$

con $r = |z| \geq 0$ da deter.

$$\vartheta = \arg(z) \in [0, 2\pi)$$

L'eq.:

$$= \left(r e^{i\vartheta}\right)^4 = z^4 = -1 = w = 1 \cdot e^{i\pi}$$

$$= r^4 \left(e^{i\vartheta}\right)^4 = r^4 e^{i 4\vartheta}$$

Ho il sistema:

$$\begin{cases} r^4 = 1 \\ 4\vartheta = \pi + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = 1 \\ \vartheta = \frac{\pi}{\ldots} + k \ldots \end{cases}$$

$$4 \quad + \frac{}{2}\pi) \qquad k = 0, 1, 2, 3$$

Dunque le soluzioni sono:

$$z_0 = e^{i \pi/4}$$

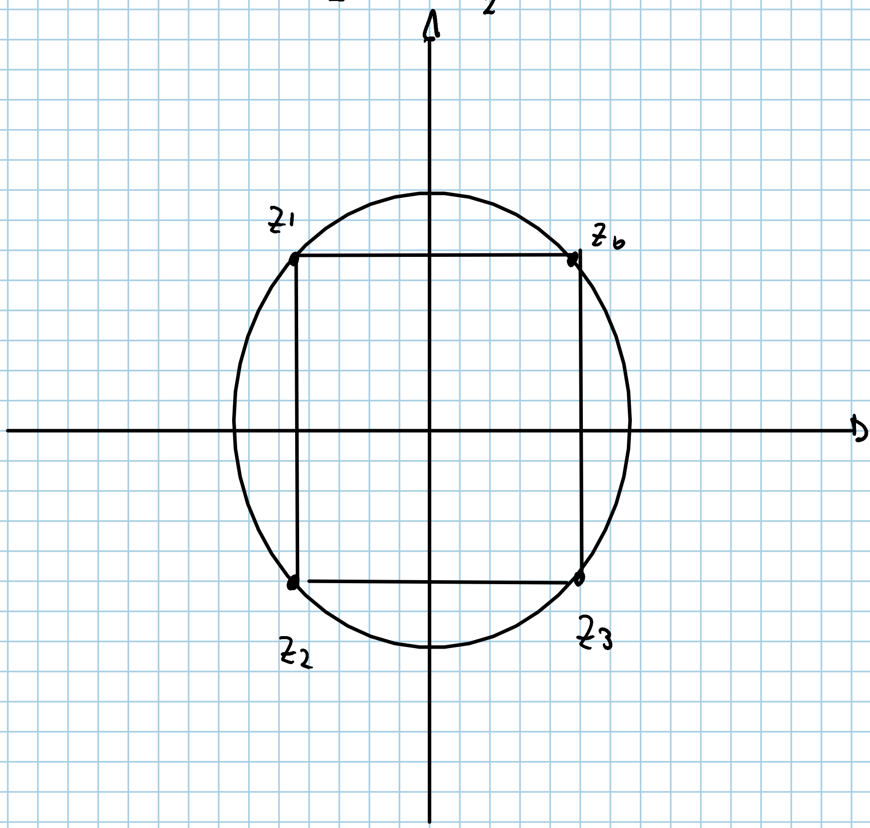
$$z_1 = e^{i(\pi/4 + \pi/2)} = e^{i \frac{3}{4}\pi}$$

$$z_2 = e^{i(\pi/4 + \pi)} = e^{i \, 5/4 \pi}$$

$$z_3 = e^{i(\pi/4 + \frac{3}{2}\pi)} = e^{i \, 7/4 \pi}$$

In forma algebrica

$$\begin{cases} z_0 = e^{i\pi/4} = \cos \pi/4 + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \\ z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \\ z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \\ z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$



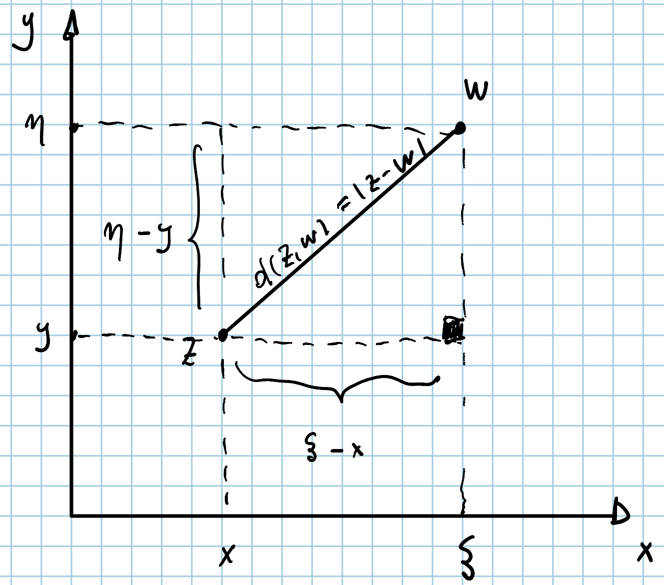
Numeri complessi come spazio metrico

Definiamo la distanza fra due numeri complessi

$z, w \in \mathbb{C}$

$$d(z,w) = |z-w|$$

Si tratta della lunghezza del segmento che congiunge z a w:



$z = x + iy$

$w = \xi + i\eta$

$$|z-w| = |x+iy-(\xi+i\eta)| = |x-\xi+i(y-\eta)|$$
$$= \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$$

La funzione distanza di verifica:

(1) $d(z,w) \geq 0$ e $d(z,w) = 0 \iff z = w$

(2) $d(z,w) = |z-w| = |w-z| = d(w,z)$

(3) $d(z,w) \leq d(z,\zeta) + d(\zeta,w) \quad \forall z, \zeta, w \in \mathbb{C}$

dis. triangolare

<u>ES. 1</u> Dato $z_0 \in \mathbb{C}$ ed $r > 0$ l'insieme

$$A = \{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r \}$$

è la circonf. di centro z_0 e raggio r

<u>ES. 2</u> Dato $z_0 \in \mathbb{C}$ ed $r > 0$ l'insieme

ES. 2 Dato $z_0 \in \mathbb{C}$ ed $r > 0$ l'insieme

$$B = \{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \le r \}$$

è il cerchio chiuso di centro z_0 e raggio r.

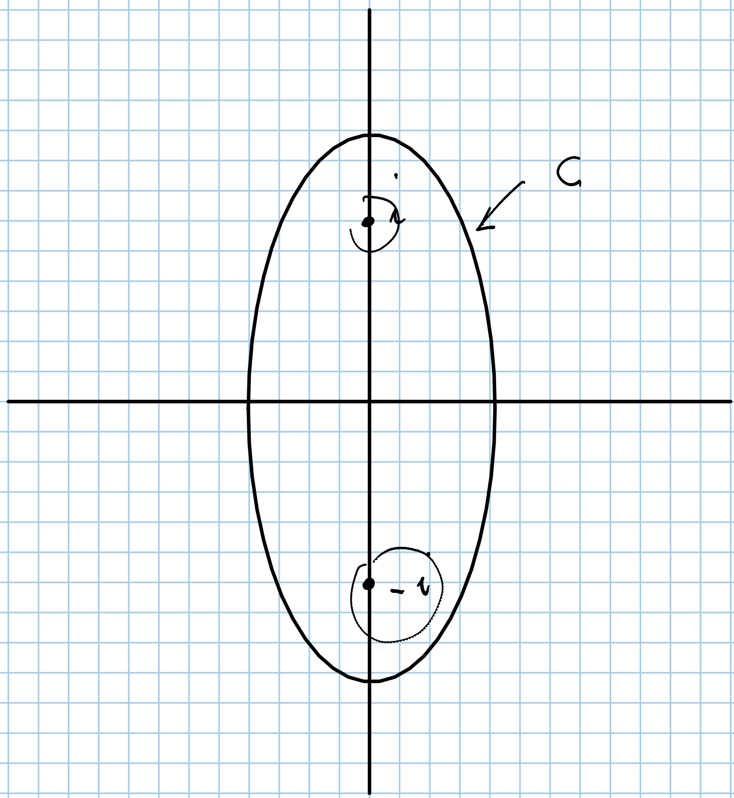
ES. 3 L'insieme

$$C = \{ z \in \mathbb{C} : \underline{|z - i|} + \underline{|z + i|} = 4 \}$$

$z - (-i)$

$1 \to \emptyset$

è un'ellisse di fuochi i e $-i$



Polinomi complessi

Def. Siano $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ dei coefficienti fissati.
Un'espressione del tipo

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot z^k$$

si dice polinomio complesso nella variabile complessa $z \in \mathbb{C}$.
Se $a_n \neq 0$ diremo che P ha grado $n \in \mathbb{N}$.
Infine diremo che un numero complesso $z_0 \in \mathbb{C}$ è una radice del polinomio P se

$$P(z_0) = 0$$

ovvero P calcolato in z_0 si annulla.

<u>TEOR (fondamentale dell'Algebra)</u> Un polinomio complesso di grado $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, ha esattamente n radici (contate con la loro molteplicità).

Dim. Omessa. Difficile.

<u>Esempio</u> (1) Il polinomio reale $P(x) = x^2 + 1$ in $x \in \mathbb{R}$ <u>non</u> ha radici reali.

(2) Invece il polinomio complesso $P(z) = z^2 + 1$ in $z \in \mathbb{C}$ ha due radici. Infatti

$$z^2+1 = (z+i)(z-i) = (z^2 - i^2) = z^2 + 1$$

Le radici sono $z = \pm i$.

<u>Osservazione</u> Un polinomio complesso $P(z)$ di grado n ha n radici $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$. Dunque i fattori $z - z_1, z - z_2, \dots, z - z_n$ dividono $P(z)$.
Quindi $P(z)$ si può fattorizzare nel seguente modo:

$$\sum_{k}^{n} a_k z^k = P(z) = a_n \cdot \underbrace{(z-z_1)(z-z_2) \cdot \ldots \cdot (z-z_n)}_{n \text{ fattori}}.$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k z^k \qquad n \text{ fattori}$$

Osservazione Supponiamo che il polinomio complesso

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

abbia coefficienti reali $a_k \in \mathbb{R}$.
Allora

$$P(z_0) = 0 \iff P(\overline{z_0}) = 0$$

$z_0 \in \mathbb{C}$ è radice $\qquad$ $\overline{z_0} \in \mathbb{C}$ è radice

Verifica. Supp. che $P(z_0) = 0$

$$0 = P(z_0) = \sum_{k=0}^{n} a_k z_0^k \Rightarrow 0 = \overline{0} = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k z_0^k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k z_0^k} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k}\, \overline{z_0}^k = \sum_{k=0}^{n} a_k (\overline{z_0})^k$$

$$= P(\overline{z_0}).$$ Fine Dim.

ESERCIZI in forma algebrica

ES. 1 Calcolare le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$z^3 = 8i$$

e disegnarle nel piano di Gauss.

Sol. $w = 8i$ di cui devo calc. le radici cubiche.

$|w| = +8$

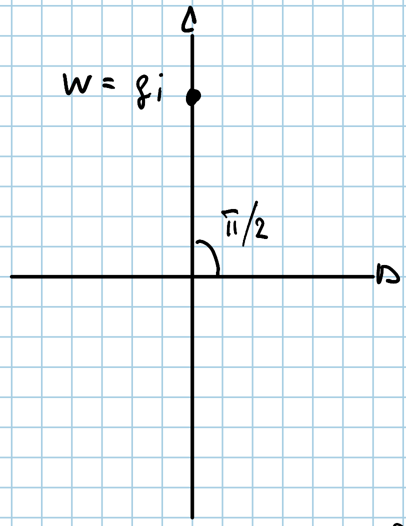
$\arg(w) = \pi/2$

$$\boxed{\arg(x+iy) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)}$$

$\arg(w) = \pi/2$

$\arg(x+iy) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$

se $x+iy \in 1°$ Quadr.



Cerco sol. $z = r e^{i\vartheta}$ con $r \geq 0$

$\vartheta \in [0, 2\pi)$

$$r^3 e^{i3\vartheta} = z^3 = w = 8 e^{i\pi/2}$$

↓ Sistema

$$\begin{cases} r^3 = 8 \iff r = 2 \\ 3\vartheta = \pi/2 + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$k = 3$ $\qquad$ $k = 0, 1, 2$

La seconda ci dà

$$\vartheta_k = \frac{\pi}{6} + \boxed{\frac{2k}{3}\pi} \qquad k = 0, 1, 2$$

$$\vartheta_0 = \pi/6$$

$$\vartheta_1 = \pi/6 + \frac{2}{3}\pi = \frac{5}{6}\pi$$

$$\vartheta_2 = \pi/6 + \frac{4}{3}\pi = \frac{9}{6}\pi = \frac{3}{2}\pi$$

Soluzioni

$$z_0 = 2e^{i\vartheta_0} = 2e^{i\pi/6} = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

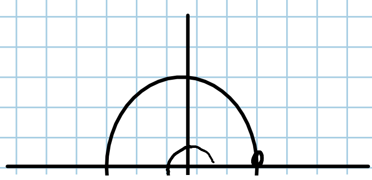
$$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\right)$$

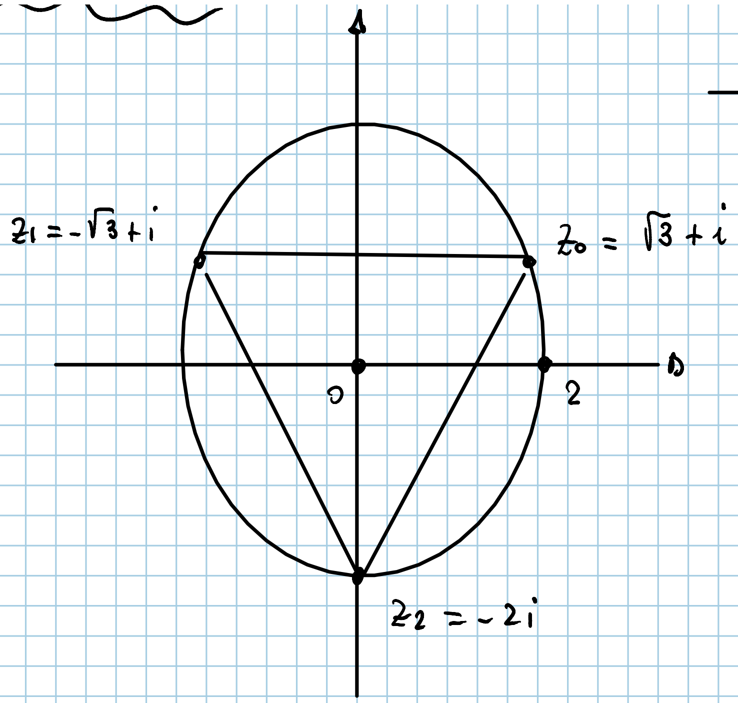
$$= \sqrt{3} + i$$

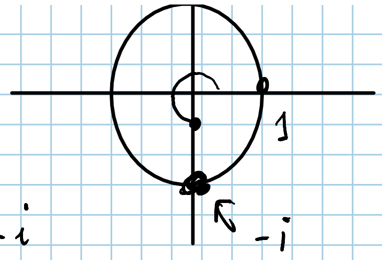
$$z_1 = 2e^{i\vartheta_1} = 2e^{i\frac{5}{6}\pi} = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} + i$$

$$z_2 = 2e^{i\vartheta_2} = 2\boxed{e^{i\frac{3}{2}\pi}} = -2i$$

$= -i$







$$e^{i\frac{3}{2}\pi} = \underbrace{\cos \frac{3}{2}\pi}_{=0} + i \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -i$$

<u>ES 2</u> Calcolare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$z^4 - 2i\sqrt{3}\, z^2 - 4 = 0$$

e rappresentarle nel piano di Gauss.

Sol. Teor. Fond. Alg. $\Rightarrow$ ci sono 4 soluzioni.

Poniamo $w = z^2$ e l'eq. diventa

$$w^2 - 2i\sqrt{3}\, w - 4 = 0 .$$

Uso la formula risolutiva per le eq. di grado 2:

$$w_{\pm} = \frac{2i\sqrt{3} \pm \sqrt{(2i\sqrt{3})^2 - 4 \cdot (-4)}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(2i\sqrt{3} \pm 2\right) = i\sqrt{3} \pm 1$$

Ora devo risolvere le due equazioni

$$z^2 = w_+$$
$$z^2 = w_-$$

Prima equazione

$$z^2 = w_+ = 1 + i\sqrt{3}$$ (Posso mettere $z^2 = (x+iy)^2$)

Devo calcolare:

$$|1+i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

Osservo che $1+i\sqrt{3} \in 1^\circ$ Quadrante

Dunque

$$\arg(1+i\sqrt{3}) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right)$$
$$= \pi/3 .$$

Dunque $z = re^{i\vartheta}$

$$r^2 e^{i2\vartheta} = z^2 = w_+ = 2e^{i\pi/3}$$

Sistema:

$$r^2 = 2 \iff r = \sqrt{2}$$
$$2\vartheta_k = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \qquad k = 0,1$$
$$\vartheta_k = \frac{\pi}{6} + k\pi$$

$$\longrightarrow \quad \vartheta_0 = \pi/6$$
$$\vartheta_1 = \pi/6 + \pi = \frac{7}{6}\pi$$

Trovo le due soluzioni

$$z_0 = \sqrt{2}\, e^{i\pi/6} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) =$$
$$z_1 = \sqrt{2}\, e^{i7\pi/6} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{6}\pi + i\sin\frac{7}{6}\pi\right) =$$

$$z_0 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + i\,\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$z_1 = -\sqrt{\frac{3}{2}} - i\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Rimane da risolvere $z^2 = w_-$. Per casa.