Lezione 30

venerdì 5 dicembre 2014
10:14

Obiettivo è di calcolare

$$\int \left(\frac{1}{x^4 - x^3} \right) dx$$

Metodo dei "fratti semplici":

$$\frac{1}{x^3(x-1)} = \frac{A + Bx + Cx^2}{x^3} + \frac{D}{x-1} =$$

con $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ da determinare.

$$= \frac{(A+Bx+Cx^2)(x-1) + Dx^3}{x^3(x-1)}$$

$$= \frac{Ax + Bx^2 + Cx^3 - A - Bx - Cx^2 + Dx^3}{x^3(x-1)}$$

$$= \frac{-A + x(A-B) + x^2(B-C) + x^3(C+D)}{x^3(x-1)}$$

Impongo il sistema:

$$\begin{cases} -A = 1 \\ A - B = 0 \\ B - C = 0 \\ C + D = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = -1 \\ B = A = -1 \\ C = B = -1 \\ D = -C = +1 \end{cases}$$

Conclusione

$$\int \frac{1}{x^3(x-1)} dx = \int \left(\frac{-1 - x - x^2}{x^3} + \frac{1}{x-1} \right) dx$$

$$= \int \left(-x^{-3} - x^{-2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} x^{-2} + x^{-1} - \log|x| + \log|x-1| + C$$

Esempio Calcolare $\boxed{I = \int_2^3 \frac{1}{x^3(x-1)} dx}$

TFCI :

$$I = \left[\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x} + \log\left|\frac{x-1}{x}\right| \right]_{x=2}^{x=3}$$

$$= \text{ECC. ECC.}$$

<u>Integrazione per parti e per sostituzione</u>

TEOR Siano $f, g \in C^1([a,b])$. Allora vale la seguente formula di integrazione per parti:

$$\int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx = \Big[f(x) g(x) \Big]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx .$$

$$\Big[f(x) g(x) \Big]_{x=a}^{x=b} = f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

Dim. Per la regola della derivata del prodotto

$$\forall x \in [a,b] \quad (f(x)\, g(x))' = f'(x)\, g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Con un integrale indefinito trovo

$$f(x) g(x) \overset{TFCI}{=} \int (f(x) g(x))' dx = \boxed{\int f'(x) g(x)\, dx} + \int f(x)\, g'(x)\, dx$$

Riordinando

$$\int f'(x) g(x)\, dx = f(x) g(x) - \int f(x)\, g'(x)\, dx .$$

$\square$

Esempi $g(x)$ $f'(x)$

Esempi $g(x)$ $f'(x)$

- $$\int_0^1 \underbrace{x}_{g(x)}\, \underbrace{e^x}_{f'(x)}\, dx = \Big[x e^x\Big]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 e^x\, dx = 1\cdot e^1 - 0 - \Big[e^x\Big]_{x=0}^{x=1}$$
$$= e - (e-1)$$
$$= 1$$

$f(x) = e^x$

- $$\int_0^{\pi/2} \underbrace{x}_{g(x)}\, \underbrace{\sin x}_{f'(x)}\, dx = \Big[-x\cos x\Big]_{x=0}^{x=\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (-\cos x)\, dx =$$
$$= \overbrace{-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}}^{=0} + \int_0^{\pi/2} \cos x\, dx = \Big[\sin x\Big]_{x=0}^{x=\pi/2}$$
$$= +1$$

$f(x) = -\cos x$

- $$\int_1^e \underbrace{x}_{f'(x)}\, \underbrace{\log x}_{g(x)}\, dx = \Big[\frac{x^2}{2}\log x\Big]_{x=1}^{x=e} - \int_1^e \frac{x^2}{2}\,\frac{1}{x}\, dx$$
$$= \frac{e^2}{2}\log e - \frac{1}{2}\int_1^e x\, dx =$$
$$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}\Big[x^2\Big]_{x=1}^{x=e} = \ldots$$

$f(x) = \frac{x^2}{2}$

- $$\int_0^1 \underbrace{1}_{f'(x)}\cdot \underbrace{\arctan x}_{g(x)}\, dx = \Big[x \arctan(x)\Big]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 x\,\frac{1}{1+x^2}\, dx$$
$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\, dx$$
$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\Big[\log(1+x^2)\Big]_{x=0}^{x=1} = \ldots$$

$f(x) = x$

Esercizio per casa Calcolare $\int x\cdot \sin^2 x\, dx$

TEOR (Integrazione per sostituzione) Sia $\varphi : [y_0, y_1] \to [x_0, x_1]$

una funzione derivabile con derivata continua e tale che
$\varphi(y_0) = x_0$ e $\varphi(y_1) = x_1$.
Sia poi $f: [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua.
Allora vale la formula di integrazione per sostituzione seguente:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx = \int_{y_0}^{y_1} f(\varphi(y)) \cdot \varphi'(y)\, dy .$$

Osservazione: Si pone $x = \varphi(y)$ "sostituzione"
si trasforma $dx = \varphi'(y)\, dy$
Si cambiano gli estremi di integrazione:

$x_0 \to y_0$ perché $\varphi(y_0) = x_0$

$x_1 \to y_1$ " $\varphi(y_1) = x_1$

Dim. Funzione ausiliaria $H: [y_0, y_1] \to \mathbb{R}$

$$H(y) = \int_{x_0}^{\varphi(y)} f(x)\, dx = \int_{\varphi(y_0)}^{\varphi(y)} f(x)\, dx \qquad y \in [y_0, y_1]$$

$$= F(\varphi(y)) \quad \text{funzione composta.}$$

dove

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt \quad \text{è la funzione integrale di } f$$

Derivata di H

$$H'(y) = F'(\varphi(y)) \cdot \varphi'(y) \qquad \text{Regola derivata funz. composta}$$

$$\underset{\text{TFCI}}{=} f(\varphi(y)) \cdot \varphi'(y) \qquad \forall y \in [y_0, y_1]$$

Passo agli integrali

$$= \int_{y_0}^{y_1} H'(y)\, dy = \int_{y_0}^{y_1} f(\varphi(y))\, \varphi'(y)\, dy$$

$$= \int_{y_0} H(y)\,dy = \boxed{\int_{y_0} f(\varphi(y))\,\varphi'(y)\,dy}$$

TFCI

$$= H(y_1) - H(y_0)$$

$$= \int_{x_0}^{\varphi(y_1)} f(x)\,dx - \int_{x_0}^{\varphi(y_0)} f(x)\,dx$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx - \int_{x_0}^{x_0} f(x)\,dx$$

$$= \boxed{\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx} \qquad \square$$

Esempio Calcolare l'integrale:

$$I = \int_1^2 \frac{x+3}{x \cdot \sqrt{x+2}}\,dx$$

Soluzione. Provo con la sostituzione $y = \sqrt{x+2} \iff y^2 = x+2$

$\iff x = y^2 - 2$

Diff.: $dx = 2y\,dy$

Estremi

$x = 1 \to y = \sqrt{3}$

$x = 2 \to y = 2$

Quindi

$$I = \int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{y^2 - 2 + 3}{(y^2-2)\,\cancel{y}}\, 2\cancel{y}\,dy$$

$$= 2 \int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{y^2+1}{y^2-2}\,dy$$

$$= 2 \int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{y^2 - 2 + 2 + 1}{y^2-2}\,dy$$

$$= 2 \int_{\sqrt{3}} \qquad y^2 - 2$$

$$=$$

$$= 2 \int_{\sqrt{3}}^{2} \left(1 + \frac{3}{y^2 - 2} \right) dy$$

$= (\dots) =$ Chiaro come procedere
fratti semplici

Esempio Calcolare

$$I = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} \, dx$$

Sostituzione : $x = \sin y$ [[Tutte le volte che nell'integranda c'è una $\sqrt{1-x^2}$ provare questa sostit.]]

$y = \arcsin x$

$dx = \cos y \, dy$

$x = 0 \rightarrow y = 0$

$x = 1 \rightarrow y = \arcsin(1) = \pi/2$

Dunque

$$I = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 y} \, \cos y \, dy = \int_0^{\pi/2} \cos^2 y \, dy =$$

Uso le formule di bisezione:

$$\cos^2 y = \frac{1 + \cos 2y}{2}$$

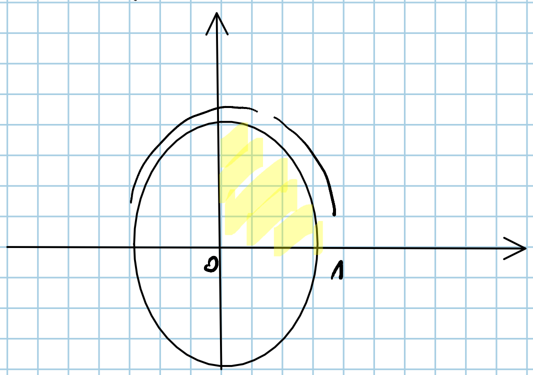
$$= \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2y}{2} \, dy = \frac{1}{2} \left[y \right]_{y=0}^{y=\pi/2} + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos 2y \, dy$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \left[\cancel{\sin 2y} \right]^{y=\pi/2} = \frac{\pi}{4} .$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\left[\cancel{\frac{\sin 2y}{2}}\right]_{y=0}^{y=\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

Osservazione $\quad f(x) = \sqrt{1-x^2}$ è una mezza circonferenza

$-1 \leq x \leq 1$



Sostituzioni parametriche per gli integrali trigonometrici

Esempio $\quad$ Vogliamo calcolare il seguente integrale

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin x + \cos x}\, dx .$$

Si passa con le sost. parametriche. Si pone

$$t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$$

Ora si hanno:

$$\sin x = 2 \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\,\frac{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} =$$

$$= 2\,\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^2 + 1} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\ldots}$$

$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$

$$= \frac{1 - \left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^2}{1 + \left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Differenziale: $t = \operatorname{tg}(x/2) \iff \operatorname{arctg}(t) = \frac{x}{2}$

$\iff x = 2\operatorname{arctg}(t)$

$x = 0 \to t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = 0$

$x = \pi/2 \to t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \qquad dx = 2\frac{1}{1+t^2}\,dt$

Quindi

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

$$= \int_0^1 \frac{2}{2t + 1 - t^2}\,dt$$

$\Delta = \ldots$ Procedo col metodo noto

$$I = \frac{\sqrt{2}}{2}\log\left(2\sqrt{2}+3\right) - \log 2$$

$\blacksquare$

Osservazione Se l'integranda contiene $\sqrt{1+x^2}$ provare con la sost. $x = \sinh y$

infatti

$$\sqrt{1+\sinh^2 y} = \sqrt{\cosh^2 y} = \cosh y$$

$$\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$$