Lezione 31

mercoledì 10 dicembre 2014
10:41

Integrali impropri (o generalizzati)

Ce ne sono di 2 tipi:

1) Integrali di funzioni su intervalli non limitati

2) Integrali su intervallo limitato di funzioni non limitate.

1) Integr. su dominio non limitato

DEF Sia $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua (oppure integrabile su ogni $[a, M]$ con $M > a$). Diciamo che f è integrabile in senso improprio su $[a, \infty)$ se esiste finito il seguente limite:

$$\lim_{M \to \infty} \int_a^M f(x)\,dx =: \int_a^\infty f(x)\,dx \in \mathbb{R}$$

In questo caso chiamiamo l'integrale o detto integrale improprio di f su $[a, \infty)$ e diciamo che l'integrale converge.

Esempio Calcolare l'integrale improprio

$$I = \int_4^\infty \frac{1}{x(\sqrt{x} - 1)}\,dx$$

Sol. Dobbiamo calcolare

$$\lim_{M \to \infty} \int_4^M \frac{1}{x(\sqrt{x} - 1)}\,dx$$

Conti: $M > 4$ $\qquad \sqrt{x} = y \iff x = y^2 \implies dx = 2y\,dy$

$$\int_4^M \frac{1}{x(\sqrt{x} - 1)}\,dx = \int_2^{\sqrt{M}} \frac{1}{y^2(y - 1)}\,2y\,dy =$$

$x = 4 \to y = 2$

$$x = M \to y = \sqrt{M}$$

$$= 2 \int_2^{\sqrt{M}} \frac{1}{y\,(y-1)}\, dy = 2 \int_2^{\sqrt{M}} \left(\frac{-1}{y} + \frac{1}{y-1} \right) dy$$

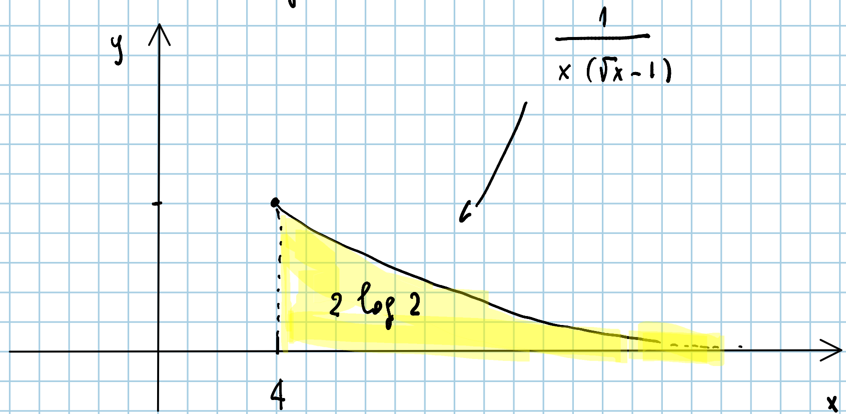
$$= 2 \Big[\log|y-1| - \log|y| \Big]_{y=2}^{y=\sqrt{M}}$$

$$= 2 \left[\log \frac{y-1}{y} \right]_{y=2}^{y=\sqrt{M}} = 2 \left(\log \frac{\sqrt{M}-1}{\sqrt{M}} - \log \frac{1}{2} \right)$$

$$= 2 \left(\log \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}} \right) + \log 2 \right)$$

$$I = \int_4^{\infty} \dots \, dx = \lim_{M \to \infty} 2 \left(\log \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}} \right) + \log 2 \right)$$

$$= 2 \log 2 .$$



Esempio (Fondamentale) Vogliamo studiare la convergenza del seguente integrale improprio al variare di $\alpha > 0$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\, dx$$

$M > 1$ $\alpha \neq 1$

Conti $M > 1$ $\qquad \alpha \neq 1$

$$\int_1^M \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \int_1^M x^{-\alpha}\, dx = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_{x=1}^{x=M} =$$

$$= \frac{1}{1-\alpha} \left[M^{1-\alpha} - 1 \right]$$

Dunque

$$\lim_{M \to \infty} \int_1^M \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \lim_{M \to \infty} \frac{1}{1-\alpha} \left[M^{1-\alpha} - 1 \right] = \begin{cases} +\infty & \alpha < 1 \\ \frac{1}{\alpha - 1} & \alpha > 1 \end{cases}$$

Poi per $\alpha = 1$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\, dx = \lim_{M \to \infty} \int_1^M \frac{1}{x}\, dx = \lim_{M \to \infty} \left[\log |x| \right]_{x=1}^{x=M} =$$

$$= \lim_{M \to \infty} \log M = +\infty$$

Conclusione

$$\boxed{\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\, dx < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha > 1}$$

Converge

TEOR (del Confronto) Siano $f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ due funzioni continue tali che $0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \geq a$. Allora

1) $\int_a^\infty g(x)\, dx < \infty \quad \Rightarrow \quad \int_a^\infty f(x)\, dx < \infty$;

2) $\int_a^\infty f(x)\, dx = \infty \quad \Rightarrow \quad \int_a^\infty g(x)\, dx = \infty$.

DEF (ordine di infinitesimo rispetto $\frac{1}{x}$ per $x \to \infty$)

Diciamo che la funzione $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ è infinitesimo di ordine $\alpha > 0$ rispetto alla funzione di confronto $1/x$ se esiste finito e $\neq 0$ il limite

esistere

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{\left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha}} = \underset{\mathbb{R}}{\overset{}{L}} \neq 0$$

$$= \lim_{x \to \infty} x^{\alpha} f(x) = \underset{\mathbb{R}}{L} \neq 0$$

<u>TEOR (del Confronto Asintotico)</u> Sia $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua $f \geq 0$ e infinitesima di ordine $\alpha > 0$ rispetto ad $1/x$ per $x \to \infty$. Allora:

1) Se $\alpha > 1$ allora $\int_a^\infty f(x)\,dx < \infty$ converge

2) Se $\alpha \leq 1$ allora $\int_a^\infty f(x)\,dx = \infty$ diverge.

Dim. 1) Per ipotesi esiste finito $\neq 0$ il limite

$$0 \neq \underset{\mathbb{R}}{L} = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{1/x^{\alpha}}$$

Dunque $L > 0$. Dalla definizione di limite esiste $\bar{x} \in \mathbb{R}$ opportunamente grande tale che

$$\frac{f(x)}{\frac{1}{x^{\alpha}}} \leq 2L \qquad \forall x \geq \bar{x}$$

ovvero

$$f(x) \leq 2L \cdot \frac{1}{x^{\alpha}} \qquad \forall x \geq \bar{x}$$

Di conseguenza

$$\int_{\bar{x}}^{\infty} f(x)\,dx \leq \int_{\bar{x}}^{\infty} \frac{2L}{x^{\alpha}}\,dx = 2L \int_{\bar{x}}^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx < \infty$$

perché $\alpha > 1$

$\check{x}$ $\check{x}$ x

Converge

Dunque per Confronto

2) Analoga. $\square$

<u>Esempio</u> Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri il seguente integrale improprio:

$$I_\alpha = \int_1^\infty \underbrace{\frac{x^\alpha}{1 + 1/x} \cdot \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)}_{= f(x)} dx$$

1) Determinare tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che I_α converge (ad un valore finito)

2) Calcolare I_α quando $\alpha = -2$.

Soluzione. 1) Calcolo l'ordine di infinitesimo di $f(x)$ rispetto ad $1/x$ per $x \to \infty$

$$\log(1+t) = t + o(t) \qquad t \to 0$$

Quindi

$$\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \text{per } x \to \infty$$

$$= \frac{1}{x}\left(1 + o(1)\right) \qquad \text{per } x \to \infty$$

$o(1)$ = infinitesimo per $x \to \infty$

Funz. integranda

$$f(x) = \frac{x^\alpha}{1 + \frac{1}{x}} \; \frac{1}{x} \left(1 + o(1)\right)$$

$$= \frac{1}{x^{1-\alpha}} \; \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \; (1 + o(1))$$

$$= \frac{1}{\quad} \; (1 + o(1))$$

$x^{1-\alpha}$

Dunque $f(x)$ è infinitesimo di ordine $1-\alpha$ rispetto a $1/x$ per $x \to \infty$.

Per il criterio del confronto asintotico

$$\int_1^\infty f(x)\,dx < \infty \text{ converge } \iff 1-\alpha > 1$$

$$\iff \alpha < 0$$

2) Calcolare I_α per $\alpha = -2$

$$\boxed{\frac{1}{x} = y} \iff x = \frac{1}{y} \implies dx = \frac{-1}{y^2}\,dy$$

$$\int_1^\infty \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{1+\frac{1}{x}} \log\left(1+\frac{1}{x}\right) dx =$$

$x = 1 \to y = 1$

$x = \infty \to y = 0$

$$= \int_1^0 \frac{\cancel{y^2}}{1+y} \log(1+y) \frac{-1}{\cancel{y^2}}\,dy$$

$z = \log(1+y) \iff e^z = 1+y$

$\iff y = e^z - 1$

$\Downarrow$

$dy = \boxed{e^z\,dz}$

$$= \int_0^1 \frac{\log(1+y)}{1+y}\,dy =$$

$y = 0 \to z = 0$

$y = 1 \to z = \log 2$

$$= \int_0^{\log 2} \frac{z}{e^z} e^z\,dz$$

$$= \int_0^{\log 2} z\,dz = \left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=\log 2} = \frac{1}{2}(\log 2)^2.$$

$\square$

2) Integrali impropri del 2° tipo
(Funzioni non limitate in intervallo limitato).

DEF Sia $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua (non necessariamente limitata vicino l'estremo sinistro a).
Diciamo che f è integrabile in senso improprio su $(a, b]$ se esiste finito il limite

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \in \mathbb{R}$$

In questo caso diciamo che l'integrale improprio a destra converge.

Esempio (Fondamentale) Studiamo al variare di $\alpha > 0$ la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx .$$

Conti: $\alpha \neq 1$

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_{x=\varepsilon}^{x=1} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{1-\alpha} \left(1 - \varepsilon^{1-\alpha} \right) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \alpha < 1 \\ +\infty & \alpha > 1 \end{cases}$$

E per $\alpha = 1$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\,dx = +\infty$$

Conclusione:

$$\boxed{\underbrace{\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx < \infty}_{\text{converge}} \iff \alpha < 1}$$