Lezione 32

giovedì 11 dicembre 2014
14:16

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \alpha < 1$$
converge

DEF (Ordine di infinito rispetto $\frac{1}{x}$ per $x \to 0^+$)
Diciamo che una funzione $f: (0,1] \to \mathbb{R}$ è infinito di ordine $\alpha > 0$ rispetto $1/x$ per $x \to 0^+$ se esiste finito e $\neq 0$ il seguente limite

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{\left(\frac{1}{x}\right)^\alpha} = \underset{\mathbb{R}}{\underset{\Uparrow}{L}} \neq 0$$

$$= \lim_{x \to 0^+} x^\alpha \cdot f(x) .$$

<u>TEOR (del Confronto Asintotico)</u> Sia $f: (0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua con ordine di infinito $\alpha > 0$ rispetto a $1/x$ per $x \to 0^+$. Allora:

(1) Se $\alpha < 1$ allora $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge

(2) Se $\alpha \geq 1$ allora l'integrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ diverge.

Esempio Studiare la convergenza del seguente integrale improprio

$$I = \int_0^\pi \frac{\sqrt{\sin x}\,\log\left(\frac{x+\pi}{2\pi}\right)}{(\pi - x)^2}\,dx$$

Svolgimento Per chiarezza faccio la sostituzione $\pi - x = y$

$x = \pi - y$

$dx = -dy$

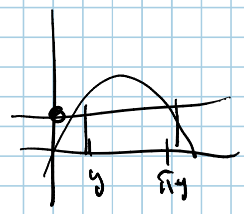
$$I = \int_\pi^0 \frac{\sqrt{\sin(\pi - y)}\,\log\left(\frac{2\pi - y}{2\pi}\right)}{y^2}\,(-dy)$$

$x = 0 \to y = \pi$

$$I = \int_{\pi} \frac{\text{[illegible]}}{y^2} \, (-dy) \qquad x \to 0 \ \to \ y = \pi$$

$$x = \pi \ \to \ y = 0$$

$$= \int_0^{\pi} \underbrace{\frac{\sqrt{\sin y}\, \log\left(1 - \frac{y}{2\pi}\right)}{y^2}}_{= f(y)} \, dy$$



Calcolo l'ordine di infinito dell'integranda rispetto ad $1/y$ per $y \to 0^+$

$$\sin y = y + o(y) = y\,(1 + o(1)) \qquad o(1) \underset{y \to 0}{\longrightarrow} 0$$

$$\sqrt{\sin y} = \sqrt{y}\,(1 + o(1))$$

$$\log(1+t) = t + o(t) \qquad t \to 0$$

$$\log\left(1 - \frac{y}{2\pi}\right) = -\frac{y}{2\pi}\,(1 + o(1))$$

Dunque

$$f(y) = \frac{\sqrt{y} \cdot \left(-\frac{y}{2\pi}\right) \cdot (1 + o(1))}{y^2}$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \, \frac{1}{y^{2 - 1/2 - 1}} \, (1 + o(1)) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \, \frac{1}{y^{1/2}} \, (1 + o(1)).$$

Quindi f è infinito di ordine $1/2$ risp. a $1/y$ per $y \to 0^+$. Siccome $\frac{1}{2} < 1$ per il criterio del confronto asintotico l'integrale dato converge.

Integrali Assolutamente Convergenti

DEF Diciamo che una funzione $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ (continua)

DEF Diciamo che una funzione $f: [a, \infty) \to \mathbb{R}$ (continua) ha integrale improprio assolutamente convergente se converge l'integrale

$$\int_a^\infty |f(x)|\, dx < \infty$$

converge.

TEOR Sia $f: [a, \infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora:

$$\int_a^\infty |f(x)|\, dx < \infty \implies \boxed{\int_a^\infty f(x)\, dx \text{ converge.}}$$

Dim omessa

Esempio Verificare che la funzione $f(x) = \sin x \cdot \log x \,/\, x^2$ ha integrale improprio su $[1, \infty)$ assolutamente convergente.

Svolgimento.

$$|f(x)| = \frac{|\sin x| \cdot |\log x|}{x^2} \qquad x \geq 1$$

$$\leq \frac{\log x}{x^2}$$

Domanda:

$$\int^\infty \frac{\log x}{x^2}\, dx \overset{?}{<} \infty$$

Ricordo che

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}} = 0 \qquad \underline{\underline{\text{NOTO}}}$$

$$\Downarrow$$

Quindi $\exists\, \bar{x} > 1$ tale che

$$\frac{\log x}{\ } < 1 \qquad \forall x \geq \bar{x}$$

$$\frac{\log x}{\sqrt{x}} \leq 1 \qquad \forall x \geq \bar{x}$$

Ma allora

$$\frac{\log x}{x^2} = \frac{\log x}{x^{3/2} \cdot x^{1/2}} = \frac{1}{x^{3/2}} \cdot \underbrace{\frac{\log x}{\sqrt{x}}}_{\leq 1 \ \forall x \geq \bar{x}} \leq \frac{1}{x^{3/2}}$$

Uso il Teor. del Confronto per integrali:

$$\int_{\bar{x}}^{\infty} \frac{\log x}{x^2}\, dx \leq \int_{\bar{x}}^{\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\, dx < \infty$$

perché $3/2 > 1$

Converge per confronto

In conclusione per un altro confronto deduciamo che

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin x \ \log x}{x^2}\, dx$$

Converge Assolutamente (e quindi anche "semplicemente").

Studio di funzione

- Dominio $D(f)$
- Segno (+ zeri) • SIMMETRIE
- Limiti agli estremi del dominio
- Asintoti
- Continuità. Prolungamenti per cont. della funzione
- Derivabilità –
- Calcolo la derivata $f'(x)$
- Segno di $f'(x)$ → intervalli di monotonia
  → max e min locali \ assoluti
- Limiti di $f'(x)$ → punti angolo, cuspidi, tg verticali
- f'' solo se espressam. richiesta

Esercizio Studiare la seguente funzione:

$$f(x) = x \cdot \left| 6 + \frac{1}{\log(4x)} \right|$$

- Dominio
  - $4x > 0 \iff x > 0$ dominio log
  - $\log(4x) \neq 0 \iff 4x \neq 1 \iff x \neq 1/4$

$$D(f) = (0, 1/4) \cup (1/4, \infty)$$

- Segno
  - $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in D(f)$
  - $f(x) = 0 \iff 6 + \frac{1}{\log 4x} = 0$

$$\iff \frac{1}{\log 4x} = -6 \iff \log(4x) = -\frac{1}{6}$$

$$\iff 4x = e^{-1/6} \iff x = \frac{1}{4} e^{-1/6} << 1$$

- Limiti agli estremi del dom.
  - $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x \left| 6 + \frac{1}{\log 4x} \right| = 0$
  - $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
  - $\lim_{x \to 1/4} x \left| 6 + \frac{1}{\log(4x)} \right| = +\infty$

- Asintoti
  - $x = 1/4$ Asintoto destro e sinistro
  - Cerco eventuale Asintoto obliquo a $+\infty$

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \left| 6 + \frac{1}{\log 4x} \right| = 6$$

$$q = \lim f(x) - mx$$

$$= \lim_{x\to\infty} x\left|6+\frac{1}{\log 4x}\right| - 6x$$

$$= \lim_{x\to\infty} \cancel{6x} + \frac{x}{\log 4x} \cancel{-6x} = +\infty \quad \text{Noto}$$

Non c'è Asintoto obliquo

- Cont. e Prolungamenti

f è cont. su tutto D(f) in quanto somma, prodotto e composizione di funz. continue.

Poi osservo che

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \quad \text{Esiste finito}$$

0 è un p.to di Accum. di D(f)

quindi definendo (Noi) $f(0) = 0$ si ottiene una funzione continua anche in $x=0$.
c'è prolung. per cont. nel punto $x=0$.

- Derivabilità: f è certamente derivabile in tutti i punti $x \in D(f)$ tali che $\left|6+\frac{1}{\log 4x}\right| \neq 0$.

Nel punto $x = \frac{1}{4} e^{-1/6}$ potrebbe esserci un angolo,

- Calcolo della derivata $x \neq \frac{1}{4} e^{-1/6}$

$$f'(x) = \left|6+\frac{1}{\log 4x}\right| + x \, \frac{\left|6+\frac{1}{\log 4x}\right|}{6+\frac{1}{\log 4x}} \cdot \frac{-\frac{1}{4x}\cdot 4}{(\log 4x)^2}$$

$$= \left|6+\frac{1}{\log 4x}\right| - \frac{1}{(\log 4x)^2} \cdot \frac{\left|6+\frac{1}{\log 4x}\right|}{6+\frac{1}{\log 4x}}$$

$$\left| \quad 1 \quad \right| \left(\quad 1 \quad \right)$$

$$= \left| 6 + \frac{1}{\log 4x} \right| \left(1 - \frac{1}{6(\log 4x)^2 + \lg 4x} \right)$$

- Limiti di $f'(x)$

Calcolo :

$$\lim_{x \to \left(\frac{1}{4} e^{-1/6}\right)^{\pm}} f'(x)$$

Studio il segno

$$6 + \frac{1}{\log 4x} > 0 \iff \frac{1}{\lg 4x} > -6$$

$\lg 4x$ è negativo

$$4x \sim 4 \, \frac{1}{4} e^{-1/6} = e^{-1/6} < 0$$

$$\iff 1 < -6 \lg 4x$$

$$\iff -\frac{1}{6} > \lg 4x$$

$$\iff e^{-1/6} > 4x \iff x < \frac{1}{4} e^{-1/6} = x_0$$

Dunque

$$\lim_{x \to x_0^-} f'(x) = \lim_{x \to x_0^-} -\frac{1}{(\log 4x)^2} = -\frac{1}{(\lg 4x_0)^2} < 0$$

$$\lim_{x \to x_0^+} f'(x) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{1}{(\lg 4x)^2} = \frac{+1}{(\lg 4x_0)^2} > 0$$

Conclusione $x_0 = \frac{1}{4} e^{-1/6}$ $\in D(f)$ è un punto di angolo.
$\notin D(f')$