Lezione 35

venerdì 9 gennaio 2015
10:17

Funzioni convesse

Sia $[x_0, x_1] \subset \mathbb{R}$ un intervallo.
Dato $t \in [0,1]$ definiamo

$$x_t = t x_1 + (1-t) x_0$$

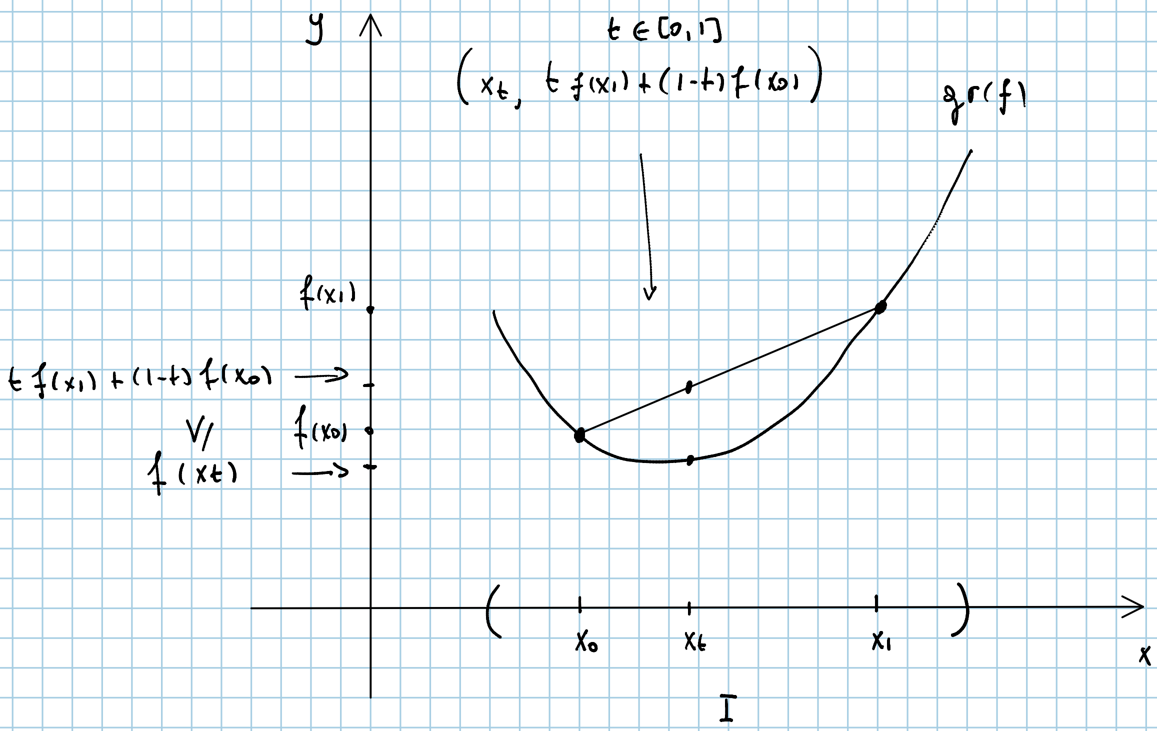
$x_t = x_1 \quad t=1$

$x_t = x_0 \quad t=0$

Definizione Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo. Una funzione $f: I \to \mathbb{R}$ si dice convessa su I se $\forall x_0, x_1 \in I$ e $\forall t \in [0,1]$ si ha

$$f(t x_1 + (1-t) x_0) \leq t f(x_1) + (1-t) f(x_0) .$$

Diremo che f è concava su I se $-f$ è convessa su I.



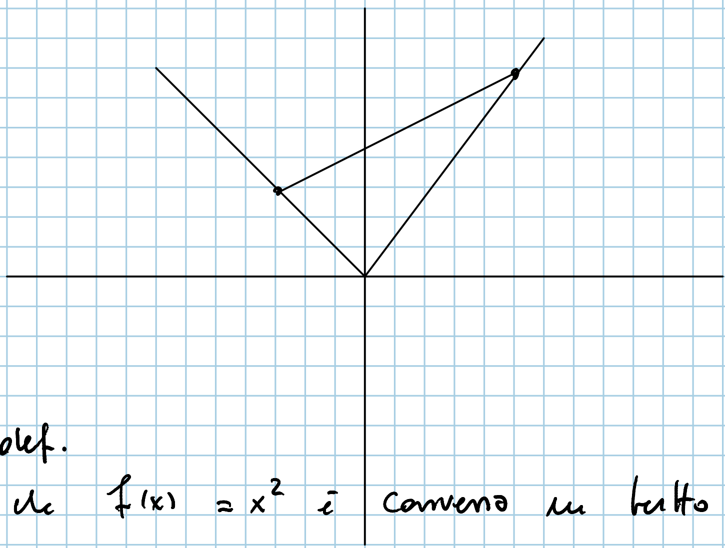
Spiegazione geometrica: f è convessa se e solo se il grafico di f sta sotto il segmento che congiunge $(x_0, f(x_0))$ ed $(x_1, f(x_1))$ comunque presi $x_0, x_1 \in I$.

ES 1 Con la def. provare che $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = |x|$ è convessa in tutto $\mathbb{R}$:

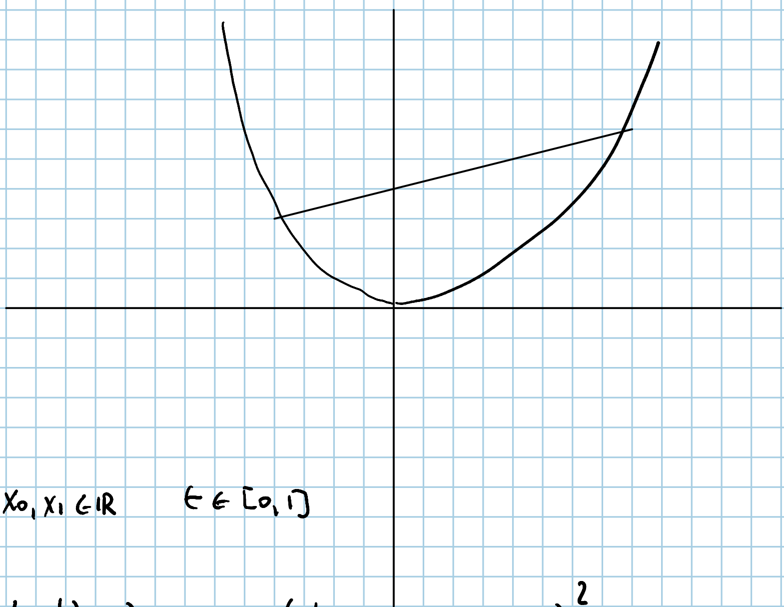
Infatti $\forall t \in [0,1]$ $\forall x_0, x_1 \in \mathbb{R}$

$$f(t x_1 + (1-t) x_0) = |t x_1 + (1-t) x_0| \leq |t x_1| + |(1-t) x_0| =$$

$$= t |x_1| + (1-t) |x_0| = t f(x_1) + (1-t) f(x_0)$$



ES 2 Provare che $f(x) = x^2$ è convessa in tutto $\mathbb{R}$ con la def.



Conti: $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ $t \in [0,1]$

$$f(t x_1 + (1-t) x_0) = (t x_1 + (1-t) x_0)^2$$
$$= t^2 x_1^2 + 2t(1-t) x_0 x_1 + (1-t)^2 x_0^2 \leq ()$$

Ricordo che $2ab \leq a^2 + b^2 \iff 0 \leq a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2$

ORA

$$2t(1-t)x_0x_1 = 2\sqrt{t(1-t)}\,x_0 \cdot \sqrt{t(1-t)}\,x_1$$
$$\le t(1-t)x_0^2 + t(1-t)x_1^2$$

- $\le t^2x_1^2 + t(1-t)x_0^2 + t(1-t)x_1^2 + (1-t)^2x_0^2 =$

$$= x_1^2\left(\cancel{t^2} + t - \cancel{t^2}\right) + x_0^2\left(t - \cancel{t^2} + 1 - 2t + \cancel{t^2}\right)$$
$$= t x_1^2 + (1-t)x_0^2 = t f(x_1) + (1-t) f(x_0).$$

]

TEOR 1 $I \subset \mathbb{R}$ intervallo $f : I \to \mathbb{R}$ funzione.
Sono equivalenti le seguenti affermazioni

A) f è convessa su I

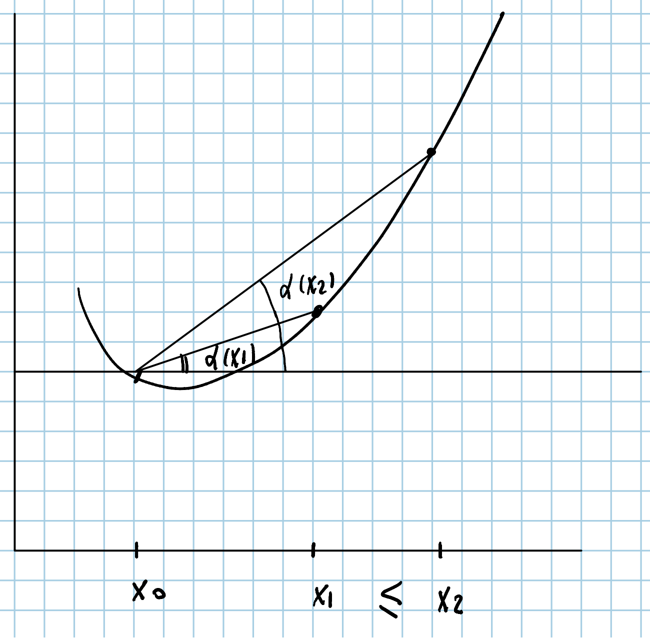
B) Per ogni punto $x_0 \in I$, i rapporti incrementali

$$x \longmapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad x \neq x_0,$$ sono funzioni crescenti.

Dim Disegno:

$$\operatorname{tg} \alpha(x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$\operatorname{tg} \alpha(x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$$



TEOR 2 $I \subset \mathbb{R}$ intervallo aperto, $f \in C^1(I)$.

Sono equivalenti le seguenti tre affermazioni:

A) f è convessa su I.

B) $\forall x_0, x \in I$ si ha $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

C) La funzione $x \mapsto f'(x)$ è crescente.

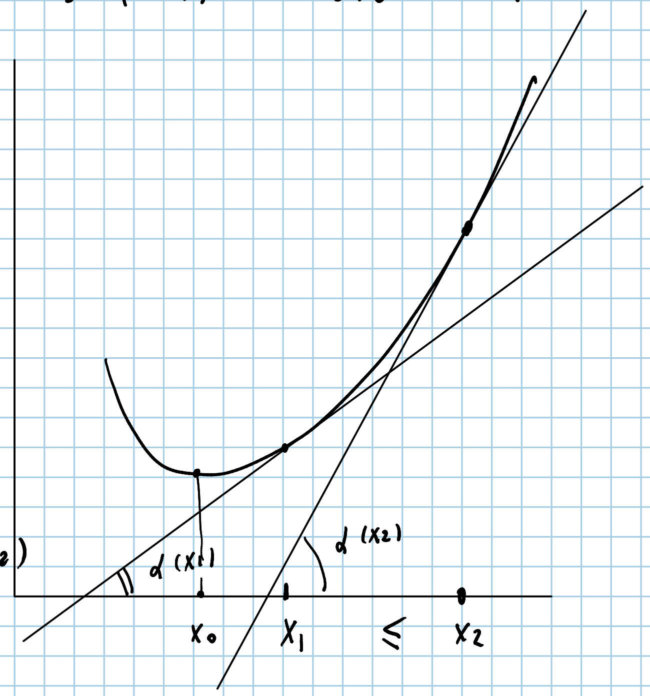
$tg\, \alpha(x_1) = f'(x_1)$

$tg\, \alpha(x_2) = f'(x_2)$

f convessa

$\Updownarrow$

$x_1 \leq x_2 \Rightarrow f'(x_1) \leq f'(x_2)$



TEOR 3 (Convessità e derivata 2^) $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto e sia $f \in C^2(I)$. Allora sono equiv.:

A) f è convessa su I

B) $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$.

Dim. $\underset{\text{su } I}{f \text{ è conv.}} \overset{\text{TEOR 2}}{\Longleftrightarrow} \underset{\text{su } I}{f' \text{ è crescente}} \Longleftrightarrow f'' \geq 0$ su I.

Oss. f concava $\Leftrightarrow$ $f'' \leq 0$ (su intervallo).

Def (Punto di flesso) Sia $f \in C^1(I)$ $I \subset \mathbb{R}$ intervallo

Def (Punto di flesso) Sia $f \in C^1(I)$ $I \subset \mathbb{R}$ intervallo aperto.

Diciamo che $x_0 \in I$ è un p.to di flesso se $\exists\, \delta > 0$ tale che f è convessa in $[x_0 - \delta, x_0]$ ed concava in $[x_0, x_0 + \delta]$.

Esempio La funzione $f(x) = e^x$ è convessa in tutto $\mathbb{R}$.
Infatti $f''(x) = e^x > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

TEOREMA $I \subset \mathbb{R}$ intervallo aperto, $f \in C^2(I)$ e $x_0 \in I$.
Allora:

i) Se x_0 è un p.to di minimo locale allora $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) \geq 0$.

ii) Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$ allora x_0 è un p.to di min. locale stretto.

iii) Se $f'(x_0) = 0$ ed f è convessa allora x_0 è un p.to di minimo assoluto.

Dim. Omessa.

Esercizi di Ricapitolazione

ES Rappresentare nel piano complesso le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ della disequazione

$$\left|\, |z-1|^2 - \left| \frac{z - \bar{z}}{2} \right|^2 - 1 \,\right| \geq \operatorname{Im}(z) - 3$$

Soluz. $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$

$$|z-1|^2 = |x + iy - 1|^2 = |(x-1) + iy|^2 = (x-1)^2 + y^2$$

$$\left| \frac{z - \bar{z}}{2} \right|^2 = \left| \frac{1}{2} \left(\cancel{x} + iy - (\cancel{x} - iy) \right) \right|^2 =$$

$$= \frac{1}{4} |2iy|^2 = |iy|^2 = y^2$$

$$\operatorname{Im}(z) = y$$

Sost.

$\mathrm{Im}(f) = y$

Sort. !

$$\left| x^2 - 2x + \cancel{1} + \cancel{y^2} - \cancel{y^2} - \cancel{1} \right| \geqslant y - 3$$

Ricopio

$$|x^2 - 2x| \geqslant y - 3$$

$$\Updownarrow$$

$$y \leqslant 3 + |x^2 - 2x| = f(x)$$

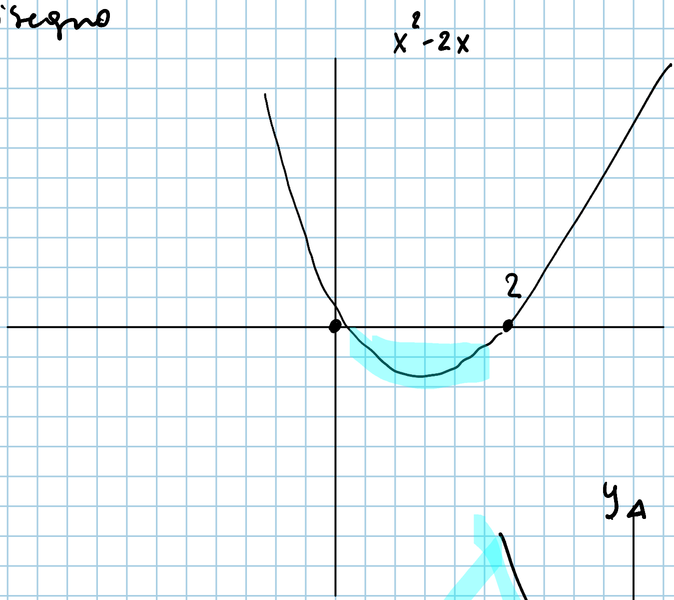
Discuto valore assoluto

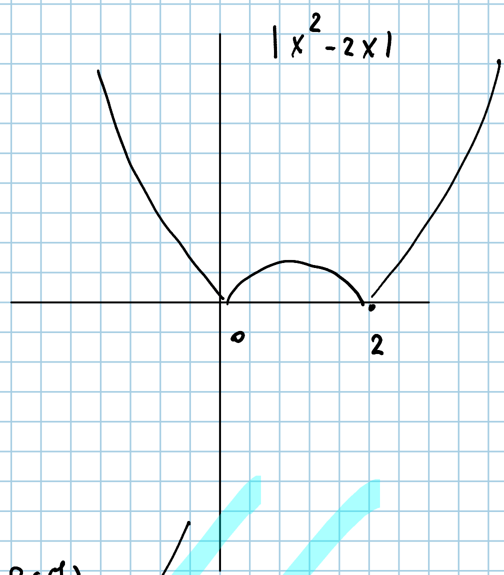
$$x^2 - 2x \geqslant 0 \iff x(x-2) \geqslant 0 \iff x \in (-\infty, 0] \cup [2, \infty)$$

Dunque

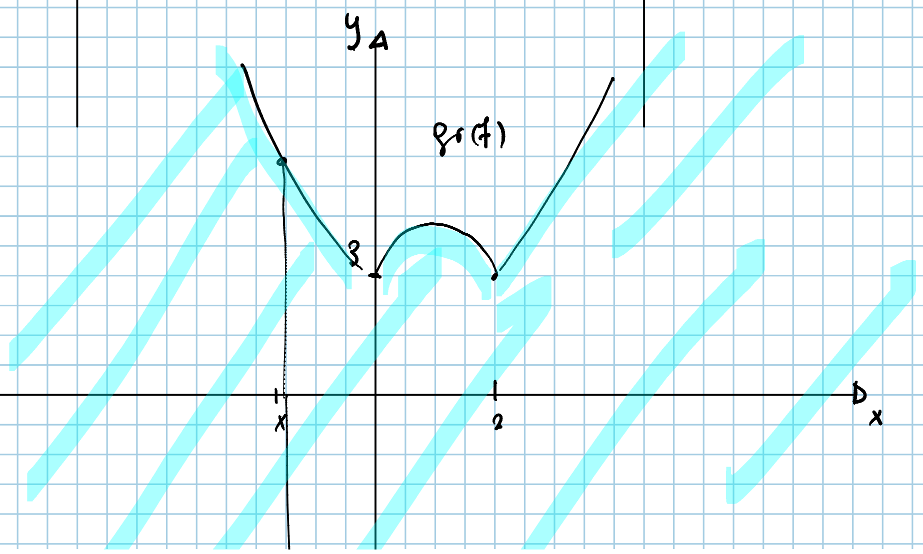
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3 & x \in (-\infty, 0] \cup [2, \infty) \\ 3 - x^2 + 2x & x \in (0, 2) \end{cases}$$

Disegno





$y \leqslant f(x)$



ES 2 Al variare di $\alpha > 0$ studiare la conv. semplice e assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \underbrace{\sqrt{e^{1/n^2} - \cos\left(\frac{\alpha}{n}\right)}}_{a_n \geq 0}$$

Soluzione.

Conv. semplice : Idea Leibniz

- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ infinitesima ~~?~~ sì

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{e^{1/n^2} - \cos\left(\frac{\alpha}{n}\right)}$$

$$= \sqrt{\lim_{n\to\infty} \left(e^{1/n^2} - \cos\left(\frac{\alpha}{n}\right)\right)}$$

$$= \sqrt{0} = 0$$

- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente ~~?~~ sì

- e^{1/n^2} è decrescente
- $\cos\left(\frac{\alpha}{n}\right)$ è crescente $\Rightarrow$ $-\cos\left(\frac{\alpha}{n}\right)$ decresce

$$\Downarrow$$

$$a_n = \sqrt{e^{1/n^2} - \cos\left(\frac{\alpha}{n}\right)} \quad \text{decresce}$$

Converge semplic. $\forall \alpha > 0$ (Leibniz ok).

Conv. Assoluta. Devo vedere per quali $\alpha > 0$ converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{e^{1/n^2} - \cos\left(\frac{\alpha}{n}\right)}$$

Idea: Teor. Confr. Asintotico:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \qquad x \to 0$$

$$e^{\frac{1}{n^2}} = 1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \qquad n \to \infty$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \qquad x \to 0$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{n}\right) = 1 - \frac{\alpha^2}{2n^2} + \frac{\alpha^4}{4!\,n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \qquad n \to \infty$$

Dunque

$$e^{1/n^2} - \cos\left(\frac{\alpha}{n}\right) = \cancel{1} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$
$$- \cancel{1} + \frac{\alpha^2}{2n^2} - \frac{\alpha^4}{4!\,n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \qquad n \to \infty$$

$$= \left(1 + \frac{\alpha^2}{2}\right)\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

e quindi

$$a_n = \sqrt{e^{1/n^2} - \cos\left(\frac{\alpha}{n}\right)} = \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{2}} \cdot \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Allora

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{1/n} = \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{2}} \neq 0$$

Siccome $\sum \frac{1}{n} = \infty$ diverge allora teo il

TCA la serie data diverge $\forall \alpha > 0$.

$\blacksquare$