Lezione 36

lunedì 12 gennaio 2015
10:12

Compito d'esame luglio 2014

ES 1 Funzione $f(x) = \log\left(e^{x/2} - \sqrt{|2-e^x|}\right)$

- Dominio

arg log > 0 $\quad e^{x/2} - \sqrt{|2-e^x|} > 0 \iff e^{x/2} > \sqrt{|2-e^x|}$

$\iff e^x > |2-e^x|$

$\iff e^{2x} > |2-e^x|^2 = (2-e^x)^2 = 4 - 4e^x + e^{2x}$

$\iff 0 > 4 - 4e^x$

$\iff e^x > 1 \iff x > 0.$

$D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} = (0, \infty).$

- Simmetrie No
- Segno. Studio $f(x) > 0$:

$$\log\left(e^{x/2} - \sqrt{|2-e^x|}\right) > 0$$

$$\Updownarrow$$

$$e^{x/2} - \sqrt{|2-e^x|} > 1$$

$$\Updownarrow$$

$$e^{x/2} > 1 + \sqrt{|2-e^x|}$$

$$\Updownarrow$$

$$e^x > 1 + 2\sqrt{|2-e^x|} + |2-e^x|$$

1° CASO $\quad 2 - e^x > 0 \iff e^x < 2 \iff x < \log 2$

$$f(x)>0 \iff e^x > 1 + 2\sqrt{2-e^x} + 2 - e^x$$
$$\iff 2e^x > 3 + 2\sqrt{2-e^x}$$
$$\iff 2e^x - 3 > 2\sqrt{2-e^x}$$

Se $2e^x - 3 < 0 \iff e^x < 3/2 \iff x < \lg 3/2$ NON è verif.

Se $2e^x - 3 > 0$ vado avanti

$$\iff (2e^x - 3)^2 > 4(2-e^x) = 8 - 4e^x$$
$$\iff \underline{\underline{4e^{2x}}} + 9 - \underline{12e^x} > 8 - \underline{4e^x}$$
$$\iff 4e^{2x} - 8e^x + 1 > 0$$

Sia $t = e^x$ con $\frac{3}{2} < t < 2$

$$4t^2 - 8t + 1 > 0$$

Radici

$$t_\pm = \frac{8 \pm \sqrt{\overset{4\cdot 16}{64} - 16}}{8}$$
$$= 1 \pm \frac{1}{8}\cdot 4\sqrt{3} = 1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$4t^2 - 8t + 1 > 0 \iff t < 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ oppure $t > 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$

è minore di $3/2$ — È minore di 2

Ricorda che $\frac{3}{2} < t < 2$

Esamino se

$$1 + \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{3}{2} \iff \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{1}{2} \iff \sqrt{3} > 1$$

Quindi

$$\frac{3}{2} < 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} < 2$$

Dunque $\sqrt{3}$ ...

$1+\frac{\sqrt{3}}{2}<t<2$ ho $f(x)>0$

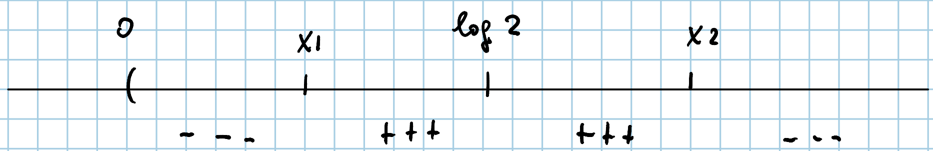
$$1+\frac{\sqrt{3}}{2}<e^{x}<2 \implies f(x)>0$$

$$x_1=\log\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)<x<\log 2 \implies f(x)>0$$

2° caso: $2-e^{x}<0$.

$$
\begin{aligned}
f(x)>0 &\iff e^{x/2}-\sqrt{|2-e^{x}|}>1\\
&\iff e^{x}>1+2\sqrt{|2-e^{x}|}+|2-e^{x}|\\
&\iff \cancel{e^{x}}>1+2\sqrt{e^{x}-2}+\cancel{e^{x}}-2\\
&\iff 1>2\sqrt{e^{x}-2}\\
&\iff 1>4(e^{x}-2)=4e^{x}-8\\
&\iff 9>4e^{x}\\
&\iff e^{x}<\frac{9}{4} \iff x<\log\frac{9}{4}=x_2
\end{aligned}
$$

(Nota che $\log\frac{9}{4}>\log 2$)



Limiti

- $$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\log\Big(\overset{1}{e^{x/2}}-\overset{1}{\sqrt{|2-e^{x}|}}\Big)=-\infty$$

- $$\lim_{x\to \infty} f(x)=\lim_{x\to \infty}\log\Big(\overset{\infty}{e^{x/2}}-\overset{\infty}{\sqrt{\underset{= |e^{x}-2|}{|2-e^{x}|}}}\Big)=$$

$$\Big(\quad {}^{x} \quad |e \;\; e^{x}| \quad \Big)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \log\left(\frac{e^{x} - |2-e^{x}|}{e^{x/2} + \sqrt{|2-e^{x}|}} \right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \log\left(\frac{\cancel{e^{x}} - \cancel{e^{x}} + 2}{\dots} \right) = -\infty$$

- Asintoti
  - La retta $x = 0$ è asintoto verticale
  - Cerco ev. asintoto obliquo a $+\infty$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \log\left(\frac{2}{e^{x/2} + \sqrt{e^{x}-2}} \right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \log\left(e^{-x/2} \cdot \frac{2}{1 + \sqrt{1-2e^{-x}}} \right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\cancel{x}} \cdot \left(-\frac{\cancel{x}}{2}\right) + \frac{1}{x} \log\left(\frac{2}{1 + \sqrt{1-2e^{-x}}} \right)$$

$$= -\frac{1}{2}$$

Cerco la q

$$q = \lim_{x\to\infty} f(x) - mx = \lim$$

$$= \lim_{x\to\infty} \log\left(e^{x/2} - \sqrt{e^{x}-2} \right) + \frac{1}{2}x$$

$$= \lim_{x\to\infty} \log\left(e^{\frac{x}{2}} \left[1 - \sqrt{1-2e^{-x}} \right] \right) + \frac{1}{2}x$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(x + \log\left[1 - \sqrt{1-2e^{-x}} \right] \right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(x + \log\left(\frac{\cancel{1} - \cancel{1} + 2e^{-x}}{1 + \sqrt{1-2e^{-x}}} \right) \right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(x + \log\left(e^{-x} \cdot \frac{2}{1+\sqrt{1-2e^{-x}}} \right) \right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\cancel{x} - \cancel{x} + \log \frac{2}{1+\sqrt{1-2e^{-x}}} \right)$$

$$= \log(1) = 0 = 0$$

Quindi la retta di eq

$$y = -\frac{1}{2}x \quad \text{è Asintoto a } +\infty.$$

- Formule Limiti
- AC
- Inerz.
- 3 ore 4 Es.

- Derivabilità $f(x) = \log\left(e^{x/2} - \sqrt{|2-e^x|} \right)$

f è deriv. in tutti i punti del dominio $Df = (0, \infty)$ tranne probabilmente $2 - e^x = 0 \iff x = \log 2$

- $f'(x)$. Per $x \neq \log 2$:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2}e^{x/2} - \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{|2-e^x|}} \cdot \frac{2-e^x}{|2-e^x|} \cdot (-e^x)}{e^{x/2} - \sqrt{|2-e^x|}}$$

$e^{x/2} - \sqrt{|2-e^x|} > 0$ in $D(f)$

- Intervalli di monotonia

• Intervalli di monotonia

$$f'(x) > 0 \iff \frac{1}{2}\left(e^{x/2} + e^{x} \frac{1}{\sqrt{|2-e^x|}} \cdot \frac{(2-e^x)}{|2-e^x|} \right) > 0$$

1° CASO : $2 - e^x > 0 \iff e^x < 2 \iff x < \log 2$

In questo caso : $f'(x) > 0 \implies f$ è crescente su $(0, \log 2)$

2° CASO $2 - e^x < 0 \iff x > \log 2$

$$f'(x) > 0 \iff e^{x/2} - e^{x} \frac{1}{\sqrt{e^x - 2}} > 0$$

$$\iff e^{x/2} > e^{x} \frac{1}{\sqrt{e^x - 2}}$$

$$\iff \sqrt{e^x - 2} \cdot e^{x/2} > e^x$$

$$\iff \sqrt{e^x - 2} > e^{x/2}$$

$$\iff e^x - 2 > e^x \iff -2 > 0$$

FALSO

Dunque si ha $f'(x) < 0$ per $x > \log 2$ e quindi f decresce $(\log 2, \infty)$

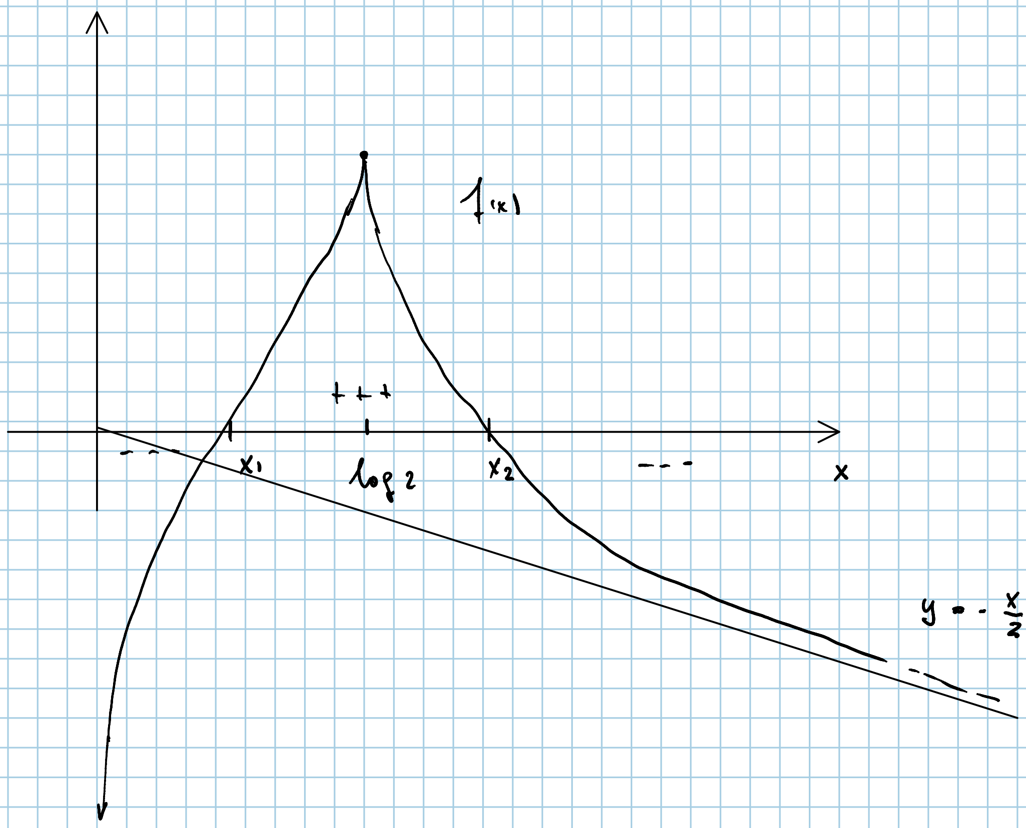
Vedo anche che $x = \log 2$ è ~~m~~ il punto unico di max assoluto.

• limiti significativi di $f'(x)$

$$\lim_{x \to \log 2^+} f'(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to \log 2^-} f'(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Quindi $x = \log 2$ è un pto di cuspide.



<u>ES 2</u> CS e CA della

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n + \sin(e^n)}{n^3 + 3\log n} (3x)^n \qquad x \in \mathbb{R}.$$

CA :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{n + \sin(e^n)}{n^3 + 3\log n} |3x|^n}_{= a_n}$$

Uso Crit. Rapp.

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1 + \sin(e^{n+1})}{(n+1)^3 + 3\log(n+1)} \cdot \frac{|3x|^{n+1}}{|3x|^n} \cdot \frac{n^3 + 3\log n}{n + \sin(e^n)}$$

$$\left(1 + 1/n + \frac{\sin(e^{n+1})}{\ldots}\right)\left(1 + 3\,\frac{\log n}{\ldots}\right)$$

$$= |3x| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1 + 1/n + \frac{\sin(e^{n+1})}{n}\right)\left(1 + 3\frac{\log n}{n^3}\right)}{\left((1+1/n)^3 + 3\frac{\log(n+1)}{n^3}\right)\left(1 + \frac{\sin(e^n)}{n}\right)}$$

$$= |3x|$$

- $L < 1 \iff |3x| < 1$ Allora la serie CA ed anche CS
- $L > 1 \iff |x| > 1/3$ Allora non c'è CA ma per il Crit. del Rapp. uni oltre di più Non c'è nemmeno CS

Studio a parte $L = 1 \iff |3x| = 1 \iff x = \pm 1/3$

CA !

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n + \sin(e^n)}{n^3 + 3\log n} \quad \begin{array}{l} +1 \quad x = 1/3 \\ (-1)^n \quad x = -1/3 \end{array}$$

Uso il Criterio del Confr. Asintotico :

$$a_n = \frac{n + \sin(e^n)}{n^3 + 3\log n} = \frac{1}{n^2} \frac{1 + \frac{\sin(e^n)}{n}}{1 + \frac{3}{n^3}\log n}$$

e quindi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^2}} = 1 \neq 0 \qquad \left(a_n \sim \frac{1}{n^2}\right)$$

Per TCA $\sum a_n$ converge perché $\sum \frac{1}{n^2} < \infty$

NOTO.

Conclusione per $x = \pm 1/3$ c'è CA $\Rightarrow$ anche CS.

$\square$

ES 3 Determinare tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che converga

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}(3+2\sqrt{x}+x)}\,dx$$

e calcolarlo per $\alpha = 1/2$

Sol. Conv. in $(0,1)$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha}(3+2\sqrt{x}+x)}\,dx$$

$$\shortparallel$$

$$f(x)$$

Osservo che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^{\alpha}}} = \frac{1}{3} \neq 0 \qquad f(x) \overset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{x^{\alpha}}$$

Quindi

$$\int_0^1 f(x)\,dx \text{ conv.} \iff \int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx \text{ converge}$$

$$\iff \alpha < 1 \qquad 1^{\wedge} \text{ Cond.}$$

Conv. in $(1,\infty)$:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}(3+2\sqrt{x}+x)}\,dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha+1}} \frac{1}{\left(\frac{3}{x}+2\frac{1}{\sqrt{x}}+1\right)}\,dx$$

$$\shortparallel$$

$$f(x)$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^{\alpha+1}}} = 1 \neq 0 \qquad f(x) \sim \frac{1}{x^{\alpha+1}} \quad x\to\infty$$

Per il T.C.A :

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx \text{ conv.} \iff \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha+1}}\,dx \text{ conv.}$$

$\iff \quad \alpha + 1 > 1$

$\iff \quad \alpha > 0 \qquad 2^\wedge$ COND.

Conclusione

Int. conv. $\iff \quad 0 < \alpha < 1$.

$\square$

Fine!