Lezione 7

giovedì 16 ottobre 2014
14:08

Successioni numeriche:

- Def. Limite
- Operazioni sui limiti
- Confronto
- Limiti elementari
- Successioni monotone

ES 7 (Confronto fra potenze e logaritmi)

Per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\alpha, \beta > 0$ si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\log n)^\beta}{n^\alpha} = 0$$

Verifica. Sostituzione $x_n = \log n \iff e^{x_n} = e^{\log n} = n$

$$\frac{(\log n)^\beta}{n^\alpha} = \frac{x_n^\beta}{(e^{x_n})^\alpha} = \frac{x_n^\beta}{e^{\alpha x_n}} = \boxed{\frac{x_n^\beta}{(e^\alpha)^{x_n}}}$$

Qui abbiamo $e^\alpha > 1$
$\alpha > 0$

e inoltre $x_n = \log n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

Dall'Esempio 5 deduciamo che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\log n)^\beta}{n^\alpha} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^\beta}{(e^\alpha)^{x_n}} = 0.$$

Successioni monotone

Def Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una succ. di numeri reali.

(1) Diremo che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente se:

$$a_{n+1} \geq a_n \qquad \forall n \geq 1$$

$>$ ← è strett. crescente

(2) Diremo che la succ. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente se

$$a_{n+1} \leq a_n \qquad \forall n \geq 1$$

$<$ ← è strett. decrescente.

<u>TEOR</u> Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una succ. di numeri reali crescente e superiormente limitata (ovvero $a_n \leq \overset{\exists}{C} < +\infty \quad \forall n \geq 1$). Allora $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad un limite finito e inoltre

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n = \sup \{a_n \in \mathbb{R} : n \geq 1\}.$$

Dim. Per l'Assioma di Completezza esiste

$$L := \sup\{a_n \in \mathbb{R} : n \geq 1\} \in \mathbb{R}.$$

Dalla Def. di estremo sup. avremo:

(1) $a_n \leq L \quad \forall n \geq 1$ (L è un maggiorante).

(2) $\forall \varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $a_{\bar{n}} > L - \varepsilon$ ⇐ (L è il minimo dei magg.)

Ora se prendo $n \geq \bar{n}$ avremo che

$$L - \varepsilon \underset{(2)}{\leq} a_{\bar{n}} \leq a_n \underset{(1)}{\leq} L < L + \varepsilon$$

↑ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente

Ovvero: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : |a_n - L| < \varepsilon \qquad \forall n \geq \bar{n}$

$\Updownarrow$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

□

Esercizio. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una succ. crescente che NON è superiormente limitata. Usando la definizione verificare che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

Osservazione. Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente avremo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}.$$

ESERCIZIO. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la successione numerica definita in modo ricorsivo:

$$a_0 = 0$$

$$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \geq 0 \quad \forall n \geq 0 .$$

Provare che questa successione converge e calcolarne il limite.

Soluzione. Supponiamo che esista finito

$$\longrightarrow \quad L = \lim_{n\to\infty} a_n \qquad \left(L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} \right)$$

Allora parto da

$$a_{n+1}^2 = 2 + a_n \qquad \forall n \geq 0$$

$$\Downarrow$$

$$L^2 = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}^2 = \lim_{n\to\infty} (2+a_n) = 2 + L$$

Trovo l'eq.

$$L^2 - L - 2 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$1 \pm \sqrt{1+8} \qquad 1 \pm 3 \nearrow 2$$

$$L = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \begin{cases} 2 \\ -1 \quad \text{DA SCARTARE} \end{cases}$$

Quindi il candidato limite è $L = 2$.

Mi domando se la succ. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è crescente:

$$\sqrt{2 + a_n} = a_{n+1} \geq a_n$$

Studio la diseq. $\sqrt{2+x} \geq x \qquad (x \geq 0)$

$$\Updownarrow$$

$$2 + x \geq x^2 \iff x^2 - x - 2 \leq 0$$

$$\iff -1 \leq x \leq 2$$

Ho scoperto questo:

$$\boxed{a_n \leq 2} \implies a_{n+1} \geq a_n \qquad \square$$

Studio quando si ha $\sqrt{2+x} \leq 2 \iff 2 + x \leq 4$

$$\iff x \leq 2$$

Ho scoperto che

$$a_n \leq 2 \implies a_{n+1} \leq 2. \qquad *$$

Ho dimostrato che
- $a_n \leq 2 \quad \forall n \geq 0$
- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è crescente

Per il Teorema appena visto esiste finito il

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 2. \qquad \square$$

ESERCIZI

ES 1 Usando la definizione provare che

ES 1 Usando la definizione provare che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - \log(n+1)}{n} = \infty .$$

Verifico preliminarmente $\log(n+1) \leq n \quad \forall n \geq 0$

Per induzione:

- Base induttiva per $n = 0$: $0 = \log(0+1) \leq 0$ OK
- Passo induttivo : $\underbrace{\log(n+1) \leq n}_{\text{Ipotesi induttiva}} \overset{?}{\Longrightarrow} \log(n+2) \leq n+1.$

Conti

$$\begin{aligned} \log(n+2) &= \log(n+1+1) \\ &= \log\left((n+1)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\right) \\ &= \log(n+1) + \log\left(1+\frac{1}{n+1}\right) \\ &\leq n + \log\left(1+\frac{1}{n+1}\right) \qquad \frac{1}{n+1} \leq 1 \\ &\leq n + \log 2 \\ &\leq n+1 . \end{aligned}$$

Torno all'esercizio :

Devo verificare che:

$\forall M>0 \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq \bar{n}$ si ha

$$\frac{n^2 - \log(n+1)}{n} > M .$$

Non è possibile risolvere in modo esatto la diseq.

Siccome $\log(n+1) \leq n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ allora

$$\frac{n^2 - \log(n+1)}{n} \geq \frac{n^2 - n}{n} = n - 1 \quad \forall n$$

Ma allora

$$n - 1 > M \implies \frac{n^2 - \log(n+1)}{n} > M$$

In conclusione scelto $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale $\bar{n} > M + 1$
e preso $n \geq \bar{n}$ avremo che

$$\frac{n^2 - \log(n+1)}{n} > M \qquad \square$$

ES 2 Calcolare il seguente limite:

$$L = \lim_{n \to \infty} \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right)}_{n \text{ addendi}}$$

Uso il Teorema del Confronto:

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}}_{\geq} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{n}{n\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$$

$$= \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{n}{n\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{\quad}}$$

$$\sqrt{1+\underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{1/n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

Conclusione : $L = 1$.

<u>Esercizio 3</u> Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n}\,.$$

Soluzione. Per confronto:

$$3 = \sqrt[n]{0+3^n} \leq \sqrt[n]{2^n+3^n} \leq \sqrt[n]{3^n+3^n} = \sqrt[n]{2\cdot 3^n} = 3\cdot\sqrt[n]{2}$$

$2 \leq 3$

$3 \to 3$; $\sqrt[n]{2^n+3^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 3$ per confronto; $3\cdot\sqrt[n]{2} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{noto}} 3$

<u>ESERCIZIO 4</u> Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - n\sin n}{3n^2 + \cos n} = \frac{1}{3}$$

Infatti

$$\frac{n^2 - n\sin n}{3n^2 + \cos n} = \frac{\cancel{n^2}\left(1 - \frac{\sin n}{n}\right)}{\cancel{n^2}\left(3 + \frac{\cos n}{n^2}\right)}$$

ORA: $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$ perché $\frac{1}{n} \to 0$ e $\sin n$ è limitato

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n^2} = 0$$

Per il Teor. sulle Oper. coi limiti

$$\lim_{n\to\infty} \dots = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{\sin n}{n}}{3 + \frac{\cos n}{n^2}} = 1/3.$$

D

Esercizio 5 Calcolare il limite

$$L = \lim_{n\to\infty} n^{2/3} \left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} \right)$$

Conti: Uso

$$(x-y)(x^2+xy+y^2) = x^3 - y^3$$

Nel caso in esame

$$n^{2/3} \left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} \right) \cdot \frac{\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{(n+1)n} + \sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{n(n+1)} + \sqrt[3]{n^2}} =$$

$$= \cancel{n^{2/3}} \cdot \frac{\cancel{n}+1 - \cancel{n}}{\cancel{n^{2/3}} \left(\sqrt[3]{(1+\frac{1}{n})^2} + \sqrt[3]{1+\frac{1}{n}} + 1 \right)}$$

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(1+\frac{1}{n})^2} + \sqrt[3]{1+\frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{3}.$$