Lezione 8

venerdì 17 ottobre 2014
10:20

Esercizio 6 Calcolare il seguente limite:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{n\,2^n + \log^4 n}{3^n + n^2}$$

$$= \frac{\boxed{n\,2^n}\left(1 + \frac{\log^4 n}{n\,2^n}\right)}{\boxed{3^n}\left(1 + n^2/3^n\right)}$$

ORA:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log^4 n}{n\cdot 2^n} = 0 \quad \text{fatto noto}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{3^n} = 0 \quad \text{fatto noto}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\,2^n}{3^n} = \lim_{n\to\infty} n\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\left(\frac{3}{2}\right)^n} = 0 \quad \text{fatto noto.}$$

Conclusione

$$L = \lim_{n\to\infty} \text{———} = 0\cdot\frac{1}{1} = 0$$

Teorema sulle operazioni coi limiti

□

SERIE NUMERICHE

Definizioni
Esempi elementari
Cond. Necessaria
Criterio Radice \ Rapporto per Serie positive
Criterio Confronto
" " Asintotico ⊗
Criterio di Leibniz per Serie a segno alterno.

Definizioni: Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione numerica.
Noi vorremmo sommare tutti i termini della successione:

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} + \dots \quad \text{infiniti addendi.}$$

Noi vogliamo allora definire il seguente simbolo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \, .$$

DEF di Somma Parziale La successione numerica $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definita così:

$$S_n \overset{DEF.}{=} a_0 + a_1 + \dots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \qquad n \in \mathbb{N}$$

si chiama successione delle somme parziali.

Attenzione: NON confondere:

a_n che è il TERMINE GENERALE DELLA SERIE
$S_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$ che sono le SOMME PARZIALI.

Può succedere:
- S_n converge in $\mathbb{R}$
- $S_n \to \infty$
- $S_n \to -\infty$
- S_n NON HA LIMITE NÈ FINITO NÈ $\pm\infty$.

DEF (Serie Convergente) Diciamo che la serie

$$\sum^{\infty} a_n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

converge se le somme parziali convergono ad un limite finito

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s \in \mathbb{R}.$$

In questo caso definiamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s \in \mathbb{R}.$$

<u>TEOR</u> (Criterio della Condizione necessaria di Convergenza)

Se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge (ad un valore finito) allora deve essere

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

(Non vale: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \sum a_n$ converge).

<u>Dim</u>. Per ipotesi esiste $s \in \mathbb{R}$ tale che

$$s = \lim_{n\to\infty} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{S.P.}}}{s_n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$$

Ma allora anche

$$s = \lim_{n\to\infty} s_{n+1}$$

$$0 = s - s = \lim_{n\to\infty} s_{n+1} - \lim_{n\to\infty} s_n$$

$$= \lim_{n\to\infty} (s_{n+1} - s_n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n+1} a_k - \sum_{k=0}^{n} a_k \right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} a_{n+1}$$

$\square$

<u>Serie Geometrica</u> Sia $x \in \mathbb{R}$. Sappiamo che

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, \qquad x \neq 1$$

somma geometrica parziale.

Sappiamo inoltre che se $|x| < 1$ si ha:

$$\lim_{n \to \infty} x^{n+1} = 0.$$

MA allora

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} x^k = \lim_{n \to \infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x}$$

Serie Geometrica
di ragione $|x| < 1$

Formula

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \qquad |x| < 1.$$

<u>Serie Telescopica</u> Voglio studiare questa serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots$$

La somma è questa:

$$S = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\dots} + \cancel{\frac{1}{n}} - \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} - \dots - \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

La serie Converge !!

Serie armonica generalizzata

Fissato un parametro $\alpha > 0$, consideriamo la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} . \quad \text{Serie Arm. Gen.}$$

Prop. La serie precedente converge se e solo se $\alpha > 1$.

Dim.

Caso $\alpha = 2$. Abbiamo

$$n^2 \geq n^2 - n = n(n-1) \qquad \forall n \geq 2$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)} \qquad \forall n \geq 2$$

$k = n-1$, $n = k+1$. $\Rightarrow$ $n=2 \to k=1$, $n=\infty \to k=\infty$

Quindi

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)k} = 1$$

Quindi

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty \quad \text{Converge ad una somma finita}$$

Caso $\alpha \geq 2$. In questo caso:

$$n^\alpha \geq n^2 \qquad \forall n \geq 1$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^2} \qquad \forall n \geq 1$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

Per $\alpha \geq 2$ la serie converge.

Caso $\alpha = 1$. La serie è questa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots$$

La serie diverge a $+\infty$. Infatti:

$$1 + \underbrace{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\geq \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = 1/2} + \underbrace{\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{17} + \dots + \frac{1}{32}}_{\geq \frac{1}{2}} + \dots$$

Questo prova che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$.

Caso $0 < \alpha \leq 1$. In questo caso:

$$n^\alpha \leq n \qquad \forall n \geq 1$$

$$\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n} \qquad \forall n \geq 1 \qquad \forall\, 0 < \alpha \leq 1$$

Conclusione:

Conclusione:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

Diverge a $+\infty$ per confronto.

Per $1 < \alpha < 2$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} < \infty$ Converge.

Criterio della Radice e del Rapporto per Serie con termine generale positivo.

Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione positiva: $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
Allora le somme parziali

$$s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n \qquad n \in \mathbb{N}$$

sono una successione crescente.
Quindi ci sono due casi:

1° Caso $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n \to \infty} s_n = s \in \mathbb{R}$

2° Caso $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n \to \infty} s_n = +\infty$

TEOR (del Confronto) Siano $0 \leq a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Allora:

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty$ converge $\Rightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$ converge

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$ diverge $\Rightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \infty$ diverge.

TEOREMA (Criterio della Radice) Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione positiva: $a_n \geq 0$ $\forall n$, e supponiamo che esista il limite

$$L = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} .$$

Allora:

(1) Se $L < 1$ allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$ converge.

(2) Se $L > 1$ allora $\lim_{n \to \infty} a_n \neq 0$ e quindi la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$ diverge.

Se $L = 1$ il criterio non dà informazione.

Dim.

(1) Siccome $L = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, allora posso scegliere $L < q < 1$. Quindi dalla def. di limite segue che $\exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q \quad \forall n \geq \bar{n}$$

$$\Downarrow$$

$$a_n \leq q^n \quad \forall n \geq \bar{n}$$

APPUNTI FINITI ALLA LAVAGNA.