Lezione 9

lunedì 20 ottobre 2014
09:50

TEOREMA (Criterio del Rapporto) Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione strettamente positiva, $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che esista il limite

$$L = \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} .$$

Allora:

(1) Se $0 \leq L < 1$ allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ converge.

(2) Se $L > 1$ allora il termine generale della serie NON è infinitesimo: $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, e quindi la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ diverge a $+\infty$.

Se $L = 1$ il criterio NON dà informazioni.

Prova

(1) Siccome $L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, allora esiste $L < q < 1$.
Dalla def. di limite segue che c'è $(\exists)$ $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq \bar{n}$ si ha

$$\boxed{\frac{a_{n+1}}{a_n} < q} \qquad \forall n \geq \bar{n}$$

Moltiplico per $a_n > 0$ e trovo

$$a_{n+1} < q \, a_n \qquad \forall n \geq \bar{n}$$

Ma anche: $a_n < q \, a_{n-1}$ purché $n-1 \geq \bar{n}$.
Per P. Transit. di $\leq$

$$a_{n+1} < q \, a_n < q \cdot q \, a_{n-1} = q^2 \cdot a_{n-1}$$

Analog. $a_{n-1} < q \cdot a_{n-2}$ se $n-2 \geq \bar{n}$. Quindi

$$a_{n+1} < q^3 \, a_{n-2}$$

Vado avanti finché posso (finché $n - \bar{n} \geq 0$)

Trovo

$$a_{n+1} \leq q^{n-\bar{n}} \cdot a_{n-(n-\bar{n}-1)} = q^n \frac{1}{q^{\bar{n}}} a_{\bar{n}+1}$$

$\forall n \geq \bar{n}$

Quindi

$$\sum_{n=\bar{n}}^{\infty} a_{n+1} \leq \sum_{n=\bar{n}}^{\infty} q^n \frac{1}{q^{\bar{n}}} a_{\bar{n}+1} =$$

$$= \frac{a_{\bar{n}+1}}{q^{\bar{n}}} \cdot \sum_{n=\bar{n}}^{\infty} q^n < \infty$$ perché $q<1$

Per confronto la serie converge.

(2) ORA esiste $1 < q < L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Quindi $\exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq \bar{n}$:

$$a_{n+1} > q\, a_n$$

Itero e trovo

$$a_{n+1} > q^{n-\bar{n}} \cdot a_{\bar{n}+1} = \underbrace{q^n}_{\to \infty} \cdot \frac{a_{\bar{n}+1}}{q^{\bar{n}}}$$

Quindi

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = +\infty \neq 0$$

$\Downarrow$ Teor. sulla CN di Conv.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty .$$ $\square$

ES 1 Dire se converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} .$$

Soluzione: Siccome

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+1/n} = 1 \neq 0$$

$\Downarrow$ Teor. della C. N.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} = \infty \quad \text{diverge.}$$

$\triangleright$

ES. 2 Calcolare la somma delle seguenti serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{2n-1}}.$$

Soluzione. Ho quasi una serie geometrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \right) - 1 =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

$x = \frac{1}{2}$

$$= \frac{1}{1-1/2} - 1 = \frac{2}{2-1} - 1 = 2 - 1 = 1$$

Poi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{2n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{3^{2n}} = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3^2)^n} =$$

$$= 3 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^n = 3 \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^n - 1 \right]$$

$$= 3 \left[\frac{1}{1-1/9} - 1 \right] = 3 \left[\frac{9}{9-1} - 1 \right]$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{8}.$$

ES. 3 Stabilire se converge la seguente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos n}{\sqrt{1+n^3}} .$$

É una serie a termini positivi : $1+\cos n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Provo che la serie converge con il Criterio del Confronto

$$0 \leq \frac{1+\cos n}{\sqrt{1+n^3}} \leq \frac{2}{n^{3/2}} \qquad \forall n \geq 1$$

$$\sqrt{n^3+1} \geq \sqrt{n^3}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{n^3+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^3}}$$

MA É NOTO che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < +\infty \qquad \text{perché} \quad \frac{3}{2} > 1 .$$

quindi per Confronto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos n}{\sqrt{1+n^3}} \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < \infty$$

$$\uparrow$$

converge.

ES. 4 Scrivere il seguente numero decimale periodico

$$x = 0,454545\ldots = 0,\overline{45}$$

in forma razionale $x = p/q$ con $p, q \in \mathbb{N}$.

Soluzione. Il significato della rappresentazione decimale è:

$$x = \frac{4}{10} + \frac{5}{100} + \frac{4}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \frac{4}{10^5} + \frac{5}{10^6} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{10^{2n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{10^{2n}}$$

$$= \frac{4}{10} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{100}\right)^n + 5 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{100}\right)^n$$

$$= \frac{4}{10} \frac{1}{1 - 1/100} + 5 \left(\frac{1}{1 - 1/100} - 1 \right)$$

$$= \frac{4}{10} \frac{100}{99} + 5 \left(\frac{100}{99} - 1 \right)$$

$$= \dots = \frac{5}{11}.$$

<u>ES 5</u> Studiare la convergenza della serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad = a_n$$

Soluzione. Termini positivi; $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0$.

Uso il Criterio del Rapporto

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)!} \cdot n!$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n!}}{(n+1)\cdot \cancel{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

$$L = 0 < 1 \overset{CR}{\Longrightarrow} \text{Serie Converge.}$$

ES. 6 Determinare tutti $x \in \mathbb{R}$ tali che converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(2+n)}{n} \cdot |x|^n .$$

Soluzione: Serie a termini positivi

$$a_n = \frac{\log(2+n)}{n} |x|^n \geq 0 \quad \forall n \quad \forall x$$

Provo con il Criterio della Radice

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\log(2+n)}{n} |x|^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{\log(2+n)}}{\sqrt[n]{n}} |x|$$

È chiaro che

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \qquad \text{Visto in classe.}$$

Poi

$$\sqrt[n]{\log 3} \leq \sqrt[n]{\log(2+n)} \leq \sqrt[n]{n+1} \leq \sqrt[n]{2n} = \sqrt[n]{2}\sqrt[n]{n}$$

$\forall n \geq 1$ $\qquad \log(n+1) \leq n \quad \forall n$ $\qquad n+1 \leq n$ [sic]

$\sqrt[n]{\log 3} \xrightarrow{n\to\infty} 1$ $\qquad \sqrt[n]{2}\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$

$\Downarrow$ Confronto

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\log(n+2)} = 1$$

Conclusione:

$$L = \lim \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{1} \cdot |x| = |x|$$

Crit. Radice

$$L = \lim \sqrt[n]{a_n} = \frac{\ }{\ } \cdot |x| = |x|$$

1° CASO $\quad L = |x| < 1 \overset{\text{Crit. Radice}}{\Longrightarrow}$ La serie converge

2° CASO $\quad L = |x| > 1 \overset{CR}{\Longrightarrow}$ La serie diverge

Rimangono questi casi $x = \pm 1$ quando $L = |x| = 1$
La serie diventa in questo caso:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(2+n)}{n}$$

Per Confronto:

$$\frac{\log(2+n)}{n} \geq \frac{\log 3}{n} \quad \forall n \geq 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(2+n)}{n} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log 3}{n} = \log 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

Conclusione: per $|x| = 1 \longrightarrow$ Serie Diverge.

Conclusione

Serie Converge $\iff x \in (-1, 1)$.

□

ES. 7 Determinare tutti i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che converga la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3-1}}{n^\alpha} \right) = a_n$$

Serie a termini positivi $\sqrt{n^3+1} \geq \sqrt{n^3-1}$.

Riscrivo meglio il termine generale

$$a_n = \frac{\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3-1}}{n^\alpha} \cdot \frac{\sqrt{n^3+1} + \sqrt{n^3-1}}{\sqrt{n^3+1} + \sqrt{n^3-1}}$$

$$= \frac{\cancel{n^3}+1 - (\cancel{n^3}-1)}{n^\alpha\left(\sqrt{n^3+1} + \sqrt{n^3-1}\right)} = \frac{2}{n^\alpha \cdot n^{3/2}\left(\sqrt{1+1/n^3} + \sqrt{1-\frac{1}{n^3}}\right)}$$

$$= \frac{2}{n^{\alpha+3/2}\Big(\underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}}_{\leq 2} + \underbrace{\sqrt{1-\frac{1}{n^3}}}_{\geq 1}\Big)}$$

Confronto

$$\frac{1}{n^{\alpha+3/2}} \cdot \frac{2}{3} \leq a_n \leq \frac{1}{n^{\alpha+3/2}} \cdot \frac{2}{1} = \frac{2}{n^{\alpha+3/2}}$$

Fatto Noto

Osservo che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+3/2}} < \infty \iff \alpha + \frac{3}{2} > 1$$

$$\iff \alpha > -1/2$$

Per il T. del C. la serie data

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \iff \alpha > -1/2.$$

Es. 8 Al variare di $x \in \mathbb{R}$ studiare la convergenza della serie

$$\sum^{\infty} \sqrt{n+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{1+n+x^2 n^2}$$

Soluzione :