ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione, Canali 2, 3, 4

Appello del 26.01.2015

TEMA 4

Esercizio 1 [9 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = -|x-3|\, e^{\frac{-1}{|x+3|}}.$$

(a) Determinare il dominio D di f; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti; studiarne la continuità e gli eventuali prolungamenti per continuità;
(b) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e calcolare i limiti significativi di f';
(c) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [9 punti] Determinare tutti gli $x \in \mathbb{R}$ tali che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n+1)}{n+2}(x-1)^n$$

converga, risp. converga assolutamente.

Esercizio 3 [9 punti] Calcolare

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2-\cos^2 x) e^{-2|\sin x|} \cos x \, dx.$$

Esercizio 4 [5 punti] Si consideri la funzione

$$f(z) = 3i + 2 - i\bar{z}^3, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Si determinino e si disegnino nel piano di Gauss gli insiemi

$$A = \{f(z) : z \in \mathbb{C}, \mathrm{Im}\,(z) = 0\},$$
$$B = \{z \in \mathbb{C} : f(z) = 29 + 3i\}.$$

Esercizio 5 [facoltativo] Sia

$$f(x) = \int_{x^2}^{2x^2} \frac{e^t - 1}{t}\, dt.$$

Dimostrare che $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ e calcolare l'ordine di infinitesimo di f.

NB: con log si indica il logaritmo in base e.

Tempo a disposizione: tre ore. Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo. Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.

TEMA 4 ANALISI 1 - ING 26/01/2015

ES 1 $f(x) = -|x-3|\, e^{\frac{-1}{|x+3|}}$

- Dominio: $x+3 \neq 0 \iff x \neq -3$ $D(f) = \mathbb{R}\setminus\{-3\}$
- Segno: $f(x) \leq 0 \quad \forall x \in D(f)$, $f(x) = 0 \iff x = 3$
- Limiti:

$$\lim_{x\to -3} f(x) = [-e^{-\infty}] = 0$$

$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = [-\infty \cdot e^{0}] = -\infty$$

- Asintoti:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} -\frac{(x-3)}{x} e^{-\frac{1}{x+3}} = -1$$

$$q = \lim_{x\to\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to\infty} -(x-3)\, e^{-\frac{1}{x+3}} + x$$

$$= \lim_{x\to\infty} x\left(1 - e^{-\frac{1}{x+3}}\right) + 3e^{-\frac{1}{x+3}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} x\left(1 - 1 + \frac{1}{x+3} + o\left(\frac{1}{x+3}\right)\right) + 3$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{x+3} + o(1)\right) + 3 = 1+3 = 4$$

$y = -x+4$ Asintoto a $+\infty$

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-3}{x} e^{-\frac{1}{|x+3|}} = 1$$

$$q = \lim_{x \to -\infty} f(x) - mx = \lim_{x \to -\infty} (x-3)\, e^{-\frac{1}{-x-3}} - x$$

$$= \lim_{x \to -\infty} x\left(e^{\frac{1}{x+3}} - 1\right) - 3\, e^{\frac{1}{x+3}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} x\left(1 + \frac{1}{x+3} + o\left(\frac{1}{x+3}\right) - 1\right) - 3$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x+3} + o\left(\frac{x}{x+3}\right) - 3 = 1 - 3 = -2$$

$y = x - 2$ Asintoto a $-\infty$

- Continuità: f continua nel dominio $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

Ponendo $f(-3) := 0$ si prolunga f con continuità su tutto $\mathbb{R}$

- Derivabilità: f derivabile nel dominio $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ tranne che nel punto $x = 3$ probabile angolo

- Derivata:

$$f'(x) = -\frac{x-3}{|x-3|}\, e^{-\frac{1}{|x+3|}} - |x-3|\, e^{-\frac{1}{|x+3|}} \cdot (-1)\, \frac{(-1)}{|x+3|^2}\, \frac{x+3}{|x+3|}$$

$$= -|x-3|\, e^{-\frac{1}{|x+3|}} \left\{ \frac{1}{x-3} + \frac{x+3}{|x+3|^3} \right\}$$

$x \neq \pm 3$

- Monotonia:

$$f'(x) \geq 0 \iff \frac{1}{x-3} + \frac{x+3}{|x+3|^3} \leq 0$$

<u>1° caso:</u> $x+3 > 0 \iff x > -3$

$$f'(x) \geq 0 \iff \frac{1}{x-3} + \frac{1}{(x+3)^2} \leq 0$$

$$\iff \frac{x^2+6x+9+x-3}{(x-3)(x+3)^2} \leq 0$$

$$\iff \frac{x^2+7x+6}{(x-3)(x+3)^2} \leq 0$$

Studio $x^2+7x+6 \geq 0$, Radici $x_\pm = \dfrac{-7 \pm \sqrt{49-24}}{2} = \dfrac{-7\pm 5}{2}$

$$= \begin{cases} -1 \\ -6 \end{cases}$$

Tabella:

	-3 … -1	-1 … 3	3 …
x^2+7x+6	$---$	$+++$	$+++$
$x-3$	$---$	$---$	$+++$
$\dfrac{x^2+7x+6}{(x-3)(x+3)^2}$	$+++$	$---$	$+++$
$f'(x)$	× $---$ 0	$+++$ ×	$---$
f	↓	↑	↓

Dunque $x=-1$ p.to min. locale

$x = 3$ p.to max locale ed in effetti assoluto

2° caso: $x < -3$

$$f'(x) \geq 0 \iff \frac{1}{x-3} - \frac{x+3}{(x+3)^3} \leq 0$$

$$\iff \frac{x^2+6x+9 - x+3}{(x-3)(x+3)^2} \leq 0$$

$$\iff \frac{x^2+5x+12}{(x-3)(x+3)^2} \leq 0$$

Studio $x^2+5x+12 \geq 0$; $\Delta < 0 \implies$ sempre verificata

Dunque $(x \neq -3)$

$$f'(x) \not\geq 0 \iff x-3 \leq 0 \iff x < -3$$

Dunque f cresce su $(-\infty, -3)$.

Dopo prolungamento: $x = -3$ p.to max assoluto.

- Limiti $f'(x)$:

$$\lim_{x \to 3^{\pm}} f'(x) = \mp e^{-1/6}$$ $x = 3$ p.to di angolo

$$\lim_{x \to -3} f'(x) = \dots = 0$$

Dopo prolungamento: f derivabile in $x = -3$ con $f'(-3) = 0$

• Grafico