ANALISI MATEMATICA 1 Area dell'Ingegneria dell'Informazione, Canali 2, 3, 4
Appello del 20.02.2015

TEMA 1

NB: con log si indica il logaritmo in base e.

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1}{\sin(2x)} e^{-\left(\frac{1}{|\tan(2x)|}\right)}$$

nell'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$.
(a) Si determini il dominio D di f; si determinino i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti; se ne studino la continuità e gli eventuali prolungamenti per continuità;
(b) se ne studi la derivabilità, si calcoli la derivata e si studi la monotonia di f; si determinino gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e si calcolino i limiti significativi di f';
(c) si dimostri che f è periodica, se ne calcoli il periodo e si disegni un grafico qualitativo di f (ripetendolo per periodicità).

Svolgimento. La funzione è periodica di periodo π: $f(x+\pi) = \frac{1}{\sin(2x+2\pi)} e^{-\left(\frac{1}{|\tan(2x+2\pi)|}\right)} = f(x)$ e dispari. La studiamo perciò nell'intervallo $[0, \pi/2]$
(a) In $[0, \pi/2]$ il dominio D, nel mezzo intervallo considerato, è uguale a $\{x \in [0, \pi/2] : \sin(2x) \neq 0, \cos(2x) \neq 0, 2x \neq \pi/2\} = \{x \in [0, \pi/2] : x \neq 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\}$. I limiti da calcolare sono:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{\cos(2x)}{\sin(2x)}}}{\sin(2x)} \quad \text{(ponendo } \sin(2x) = y) \\
&= \lim_{y\to 0^+} \frac{e^{\frac{-1}{y}}}{y} = 0 \quad \text{(questo è un limite fondamentale)} \\
&= \lim_{x\to \pi/2^-} f(x); \\
\lim_{x\to \pi/4} f(x) &= 1.
\end{aligned}$$

Quindi f è prolungabile con continuità a tutto l'intervallo $[0, \pi/2]$.
(b) Le regole di derivazione si possono applicare in D. Risulta

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{\cos(2x)}{\sin(2x)}}}{\sin(2x)} & \text{per } 0 < x < \frac{\pi}{4}, \\[2ex] \dfrac{e^{\frac{\cos(2x)}{\sin(2x)}}}{\sin(2x)} & \text{per } \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

per cui

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{\cos(2x)}{\sin(2x)}} \frac{2\sin^2(2x)+2\cos^2(2x)}{\sin^2(2x)} \sin(2x) - 2e^{-\frac{\cos(2x)}{\sin(2x)}} \cos(2x)}{\sin^2(2x)} = \dfrac{e^{-\frac{\cos(2x)}{\sin(2x)}} \big(2-\sin(4x)\big)}{\sin^3(2x)} & \text{per } 0 < x < \frac{\pi}{4}, \\[3ex] \dfrac{-e^{\frac{\cos(2x)}{\sin(2x)}} \frac{2\sin^2(2x)+2\cos^2(2x)}{\sin^2(2x)} \sin(2x) - 2e^{\frac{\cos(2x)}{\sin(2x)}} \cos(2x)}{\sin^2(2x)} = \dfrac{-e^{\frac{\cos(2x)}{\sin(2x)}} \big(2+\sin(4x)\big)}{\sin^3(2x)} & \text{per } \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Risulta perciò $f'(x) < 0$ per $0 < x < \frac{\pi}{4}$, mentre $f'(x) > 0$ per $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$. Per i limiti di f' si ha

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0 \ = \lim_{x\to\pi/2^-} f'(x) \quad \text{(questo è il limite fondamentale } \lim_{y\to 0} \frac{e^{-1/|y|}}{y^3} = 0\text{)}$$
$$\lim_{x\to\pi/4^-} f'(x) = 2$$
$$\lim_{x\to\pi/4^+} f'(x) = -2.$$

Quindi $x = 0, \pi/2$ sono punti in cui l'estensione di f è derivabile, con derivata nulla (in realtà sono flessi a tangente orizzontale), mentre $x = \pi/4$ è un punto angoloso, di massimo assoluto.
(c) Il grafico è in Figura 1.

Figura 1: Il grafico di f (Tema 1).

Esercizio 2 (a) Calcolare l'ordine di infinitesimo di

$$e^{x-x^2} - \cos(\alpha x) - \sin x$$

per $x \to 0$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
(b) calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x-x^2} - \cos(\alpha x) - \sin x}{\sinh x - \log(1 + \sin x)}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
Svolgimento. (a) Si ha, per $x \to 0$,

$$\begin{aligned} e^{x-x^2} - \cos(\alpha x) - \sin x &= 1 + x - x^2 + \frac{(x-x^2)^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\ &\quad - \Big(1 - \frac{(\alpha x)^2}{2} + o((\alpha x)^3)\Big) - \Big(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\Big) \\ &= x^2\Big(-1 + \frac{1}{2} + \frac{\alpha^2}{2}\Big) + x^3\Big(-1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\Big) \\ &= \frac{\alpha^2 - 1}{2} x^2 - \frac{2}{3} x^3 + o(x^3), \end{aligned}$$

quindi l'ordine è due se $\alpha \neq \pm 1$, mentre è tre se $\alpha = \pm 1$.
(b) Per il denominatore si ha, per $x \to 0$,

$$\begin{aligned} \sinh x - \log(1 + \sin x) &= x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \Big(\sin x - \frac{\sin^2 x}{2} + \frac{\sin^3 x}{3} + o(x^3)\Big) \\ &= x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \Big(x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\Big) \\ &= \frac{x^2}{2} + o(x^2). \end{aligned}$$

Quindi il limite è $\alpha^2 - 1$, in particolare vale 0 per $\alpha = \pm 1$.

Esercizio 3 Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale

$$\int_0^1 x e^{2x} \big(e^{2x} - 1\big)^{\alpha/2} \, dx$$

converge e calcolarlo per $\alpha = -1$.
Svolgimento. Poniamo $g(x) = xe^{2x}\big(e^{2x}-1\big)^{\alpha/2}$ e osserviamo che, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, g è continua in $(0,1]$ ed è positiva. Bisogna quindi studiare la convergenza dell'integrale in 0. Si ha, per $x \to 0^+$,

$$g(x) \sim x(2x)^{\alpha/2} = 2^{\alpha/2}x^{1+\alpha/2}.$$

Quindi per il criterio del confronto asintotico l'integrale è convergente se e solo se $1 + \alpha/2 > -1$, cioè se e solo se $\alpha > -4$.
Per $\alpha = -1$ si ha

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{xe^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}}\,dx \underset{\text{(per parti)}}{=} & \; x\sqrt{e^{2x}-1}\Big|_0^1 - \int_0^1 \sqrt{e^{2x}-1}\,dx \\
\underset{\text{(ponendo } e^{2x}-1=t^2\text{, quindi } dx = \frac{t}{1+t^2}dt)}{=} & \; \sqrt{e^2-1} - \int_0^{\sqrt{e^2-1}} \frac{t^2}{1+t^2}\,dt \\
= & \; \sqrt{e^2-1} - t\Big|_0^{\sqrt{e^2-1}} + \arctan t\Big|_0^{\sqrt{e^2-1}} \\
= & \; \arctan\sqrt{e^2-1}.
\end{aligned}$$

Esercizio 4 Si risolva la disequazione

$$\mathrm{Re}\Big((z+i)^2\Big) \le \mathrm{Im}\Big(i(\bar{z}-2i)^2\Big) \tag{1}$$

e se ne disegni l'insieme delle soluzioni nel piano di Gauss.
Svolgimento. Posto $z = x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, si ha

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\Big((z+i)^2\Big) &= \mathrm{Re}\Big(x+i(1+y)\Big)^2 = \mathrm{Re}\Big(x^2-(y+1)^2+2ix(y+1)\Big) = x^2-(y+1)^2 \\
\mathrm{Im}\Big(i(\bar{z}-2i)^2\Big) &= \mathrm{Im}\Big(i\big(x-i(y+2)\big)^2\Big) = \mathrm{Im}\Big(i\big(x^2-(y+2)^2-2ix(y+2)\big)\Big) = x^2-(y+2)^2,
\end{aligned}$$

per cui la disequazione (1) è equivalente a

$$x^2-(y+1)^2 \le x^2-(y+2)^2,$$

che ha per soluzioni

$$y \le -\frac{3}{2}.$$

Le soluzioni della disequazione sono perciò il semipiano $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z \le -\frac{3}{2}\}$, visibile in Figura 2.

Figura 2: Le soluzioni dell'esercizio 4 (Tema 1).

TEMA 2

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{-1}{\sin(4x)}e^{-\left(\frac{1}{|\tan(4x)|}\right)}$$

nell'intervallo $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.
(a) Si determini il dominio D di f; si determinino i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti; se ne studino la continuità e gli eventuali prolungamenti per continuità;
(b) se ne studi la derivabilità, si calcoli la derivata e si studi la monotonia di f; si determinino gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e si calcolino i limiti significativi di f';
(c) si dimostri che f è periodica, se ne calcoli il periodo e si disegni un grafico qualitativo di f (ripetendolo per periodicità).

Svolgimento. La funzione è periodica di periodo $\pi/2$: $f(x+\pi/2) = \frac{1}{\sin(2x+4\pi/2)} e^{-\left(\frac{1}{|\tan(2x+4\pi/2)|}\right)} = f(x)$ e dispari. La studiamo perciò nell'intervallo $[0, \pi/2]$
(a) In $[0, \pi/4]$ il dominio D, nella metà dell'intervallo che stiamo considerando, è uguale a $\{x \in [0, \pi/4] : \sin(4x) \neq 0, \cos(4x) \neq 0, 4x \neq \pi/2\} = \{x \in [0, \pi/4] : x \neq 0, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}\}$. I limiti da calcolare sono:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} f(x) &= -\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{\cos(4x)}{\sin(4x)}}}{\sin(4x)} \quad \text{(ponendo } \sin(4x) = y\text{)} \\
&= \lim_{y\to 0^+} \frac{e^{\frac{-1}{y}}}{y} = 0 \quad \text{(questo è un limite fondamentale)} \\
&= \lim_{x\to \pi/4^-} f(x); \\
\lim_{x\to \pi/8} f(x) &= -1.
\end{aligned}$$

Quindi f è prolungabile con continuità a tutto l'intervallo $[0, \pi/4]$.
(b) Le regole di derivazione si possono applicare in D. Risulta

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-e^{-\frac{\cos(4x)}{\sin(4x)}}}{\sin(4x)} & \text{per } 0 < x < \frac{\pi}{8}, \\[2ex] \dfrac{-e^{\frac{\cos(4x)}{\sin(4x)}}}{\sin(4x)} & \text{per } \frac{\pi}{8} < x < \frac{\pi}{4}, \end{cases}$$

per cui

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{e^{-\frac{\cos(4x)}{\sin(4x)}} \frac{4\sin^2(4x)+4\cos^2(4x)}{\sin^2(4x)} \sin(4x) - 4e^{-\frac{\cos(4x)}{\sin(4x)}} \cos(4x)}{\sin^2(4x)} = \dfrac{2e^{-\frac{\cos(4x)}{\sin(4x)}}\big(\sin(8x)-2\big)}{\sin^3(4x)} & \text{per } 0 < x < \frac{\pi}{8}, \\[3ex] -\dfrac{-e^{\frac{\cos(4x)}{\sin(4x)}} \frac{4\sin^2(4x)+4\cos^2(4x)}{\sin^2(4x)} \sin(4x) - 4e^{\frac{\cos(4x)}{\sin(4x)}} \cos(4x)}{\sin^2(4x)} = \dfrac{2e^{\frac{\cos(4x)}{\sin(4x)}}\big(2+\sin(8x)\big)}{\sin^3(4x)} & \text{per } \frac{\pi}{8} < x < \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Risulta perciò $f'(x) < 0$ per $0 < x < \frac{\pi}{8}$, mentre $f'(x) > 0$ per $\frac{\pi}{8} < x < \frac{\pi}{4}$. Per i limiti di f' si ha

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0 = \lim_{x\to \pi/4^-} f'(x) \quad \text{(questo è il limite fondamentale } \lim_{y\to 0} \frac{e^{-1/|y|}}{y^3} = 0) \\
&\lim_{x\to \pi/8^-} f'(x) = -2 \\
&\lim_{x\to \pi/8^+} f'(x) = 2.
\end{aligned}$$

Quindi $x = 0, \pi/4$ sono punti in cui l'estensione di f è derivabile, con derivata nulla (in realtà sono flessi a tangente orizzontale), mentre $x = \pi/8$ è un punto angoloso, di minimo assoluto.
(c) Il grafico è in Figura 3.

Figura 3: Il grafico di f (Tema 2).

Esercizio 2 (a) Calcolare l'ordine di infinitesimo di

$$1 + \log(1 + x + x^2) - \cosh(\alpha x) - \sinh x$$

per $x \to 0$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
(b) calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 + \log(1 + x + x^2) - \cosh(\alpha x) - \sinh x}{\log(1 + \arctan x) - \sinh x}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
Svolgimento. (a) Si ha, per $x \to 0$,

$$\begin{aligned}
1 + \log(1 + x + x^2) - \cosh(\alpha x) - \sinh x &= 1 + x + x^2 - \frac{(x + x^2)^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \\
&\quad - \Big(1 + \frac{(\alpha x)^2}{2} + o((\alpha x)^3)\Big) - \Big(x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\Big) \\
&= x^2\Big(1 - \frac{1}{2} - \frac{\alpha^2}{2}\Big) + x^3\Big(- 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}\Big) + o(x^3) \\
&= \frac{1-\alpha^2}{2}x^2 - \frac{5}{6}x^3 + o(x^3),
\end{aligned}$$

quindi l'ordine è due se $\alpha \neq \pm 1$, mentre è tre se $\alpha = \pm 1$.
(b) Per il denominatore si ha, per $x \to 0$,

$$\begin{aligned}
\log(1 + \arctan x) - \sinh x &= \arctan x - \frac{\arctan^2 x}{2} + \frac{\arctan^3 x}{3} + o(x^3) - \Big(x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\Big) \\
&= x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) - \Big(x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\Big) \\
&= -\frac{x^2}{2} + o(x^2).
\end{aligned}$$

Quindi il limite è $\alpha^2 - 1$, in particolare vale 0 per $\alpha = \pm 1$.

Esercizio 3 Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale

$$\int_0^1 xe^{x/2}\big(e^{x/2} - 1\big)^{2\alpha}\, dx$$

converge e calcolarlo per $\alpha = -1/4$.
Svolgimento. Poniamo $g(x) = xe^{x/2}\big(e^{x/2} - 1\big)^{2\alpha}$ e osserviamo che, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, g è continua in $(0, 1]$ ed è positiva. Bisogna quindi studiare la convergenza dell'integrale in 0. Si ha, per $x \to 0^+$,

$$g(x) \sim x\Big(\frac{x}{2}\Big)^{2\alpha} = 2^{-2\alpha}x^{1+2\alpha}.$$

Quindi per il criterio del confronto asintotico l'integrale è convergente se e solo se $1 + 2\alpha > -1$, cioè se e solo se $\alpha > -1$.

Per $\alpha = -1/4$ si ha

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{xe^{x/2}}{\sqrt{e^{x/2}-1}}\,dx &\underset{\text{(per parti)}}{=} 4x\sqrt{e^{x/2}-1}\Big|_0^1 - 4\int_0^1 \sqrt{e^{x/2}-1}\,dx \\
&\underset{\text{(ponendo } e^{x/2}-1=t^2\text{, quindi } dx=\frac{4t}{1+t^2}dt)}{=} 4\sqrt{e^{1/2}-1} - 16\int_0^{\sqrt{e^{1/2}-1}} \frac{t^2}{1+t^2}\,dt \\
&= 4\sqrt{e^{1/2}-1} - 16t\Big|_0^{\sqrt{e^{1/2}-1}} + 16\arctan t\Big|_0^{\sqrt{e^{1/2}-1}} \\
&= -12\sqrt{e^{1/2}-1} + 16\arctan\sqrt{e^{1/2}-1}.
\end{aligned}$$

Esercizio 4 Si risolva la disequazione

$$\mathrm{Re}\Big((z-2i)^2\Big) \geq \mathrm{Im}\Big(i(\bar{z}+i)^2\Big)$$

e se ne disegni l'insieme delle soluzioni nel piano di Gauss.
Svolgimento. Posto $z = x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, si ha

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\Big((z-2i)^2\Big) &= \mathrm{Re}\Big(x+i(y-2)\Big)^2 = \mathrm{Re}\Big(x^2-(y-2)^2-2ix(y-2)\Big) = x^2-(y-2)^2 \\
\mathrm{Im}\Big(i(\bar{z}+i)^2\Big) &= \mathrm{Im}\Big(i\big(x+i(1-y)\big)^2\Big) = \mathrm{Im}\Big(i\big(x^2-(1-y)^2+2ix(1-y)\big)\Big) = x^2-(1-y)^2,
\end{aligned}$$

per cui la disequazione (1) è equivalente a

$$x^2-(y-2)^2 \leq x^2-(1-y)^2,$$

che ha per soluzioni

$$y \leq \frac{3}{2}.$$

Le soluzioni della disequazione sono perciò il semipiano $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}z \leq \frac{3}{2}\}$, visibile in Figura 4.

Figura 4: Le soluzioni dell'esercizio 4 (Tema 1).

TEMA 3

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1}{\sin(x/2)}e^{-\left(\frac{1}{|\tan(x/2)|}\right)}$$

nell'intervallo $[-2\pi, 2\pi]$.
(a) Si determini il dominio D di f; si determinino i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti; se ne studino la continuità e gli eventuali prolungamenti per continuità;
(b) se ne studi la derivabilità, si calcoli la derivata e si studi la monotonia di f; si determinino gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e si calcolino i limiti significativi di f';

(c) si dimostri che f è periodica, se ne calcoli il periodo e si disegni un grafico qualitativo di f (ripetendolo per periodicità).
Svolgimento.

La funzione è periodica di periodo 4π: $f(x+4\pi) = \frac{1}{\sin(\frac{x+4\pi}{2})} e^{-\left(\frac{1}{|\tan((\frac{x+4\pi}{2})|}\right)} = f(x)$, inoltre è dispari. La studiamo perciò nell'intervallo $[0, 2\pi]$, dove la funzione è non negativa. (a) In $[0, 2\pi]$ il dominio D, nel mezzo intervallo considerato, è uguale a $\{x \in [0, 2\pi] : \sin(x/2) \neq 0, \cos(x/2) \neq 0\} = \{x \in [0, 2\pi] : x \neq 0,\ \pi, 2\pi\}$. I limiti da calcolare sono:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{\tan(x/2)}}}{\sin(x/2)} = \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\cos(x/2)} \frac{e^{-\frac{1}{\tan(x/2)}}}{\tan(x/2)} && \text{(ponendo } \tan(x/2) = y\text{)} \\
&= \lim_{y\to 0^+} \frac{e^{\frac{-1}{y}}}{y} = 0 && \text{(questo è un limite fondamentale)} \\
&= \lim_{x\to 2\pi^-} f(x)
\end{aligned}$$

Il terzo limite è:

$$\lim_{x\to\pi} f(x) = 1.$$

Quindi f è prolungabile con continuità a tutto l'intervallo $[0, 2\pi]$.
(b) Le regole di derivazione si possono applicare in D. Risulta

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{\cos(x/2)}{\sin(x/2)}}}{\sin(x/2)} & \text{per } 0 < x < \pi, \\[2ex] \dfrac{e^{\frac{\cos(x/2)}{\sin(x/2)}}}{\sin(x/2} & \text{per } \pi < x < 2\pi, \end{cases}$$

per cui

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{\cos(x/2)}{\sin(x/2)}} \frac{1/2\sin^2(x/2)+1/2\cos^2(x/2)}{\sin^2(x/2)} \sin(2x) - \frac{1}{2} e^{-\frac{\cos(x/2)}{\sin(x/2)}} \cos(x/2)}{\sin^2(x/2)} = \dfrac{1}{4} \dfrac{e^{-\frac{\cos(x/2)}{\sin(x/2)}} \big(2-\sin(x)\big)}{\sin^3(x/2)} & \text{per } 0 < x < \pi, \\[3ex] \dfrac{-e^{\frac{\cos(x/2)}{\sin(x/2)}} \frac{1/2\sin^2(x/2)+1/2\cos^2(x/2)}{\sin^2(x/2)} \sin(2x) - \frac{1}{2} e^{\frac{\cos(x/2)}{\sin(x/2)}} \cos(x/2)}{\sin^2(x/2)} = -\dfrac{1}{4} \dfrac{e^{\frac{\cos(x/2)}{\sin(x/2)}} \big(2+\sin(x)\big)}{\sin^3(x/2)} & \text{per } \pi < x < 2\pi,. \end{cases}$$

Risulta perciò $f'(x) > 0$ per $0 < x < \pi$, mentre $f'(x) < 0$ per $\pi < x < 2\pi$. Per i limiti di f' si ha

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0 = \lim_{x\to 2\pi^-} f'(x) \quad \text{(questo è il limite fondamentale } \lim_{y\to 0} \frac{e^{-1/|y|}}{y^3} = 0\text{)} \\
&\lim_{x\to \pi^-} f'(x) = 1/2 \\
&\lim_{x\to \pi^+} f'(x) = -1/2.
\end{aligned}$$

Quindi $x = 0$ e $x = 2\pi$ sono punti in cui l'estensione di f è derivabile, con derivata nulla (in realtà sono flessi a tangente orizzontale), mentre $x = \pi$ è un punto angoloso, di massimo assoluto.
(c) Il grafico è in Figura 5.

Figura 5: Il grafico di f (Tema 3).

Esercizio 2 [9 punti] (a) Calcolare l'ordine di infinitesimo di

$$\arctan x - e^{x^2+x} + \cosh(\alpha x)$$

per $x \to 0$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
(b) calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - e^{x^2+x} + \cosh(\alpha x)}{\sin x + \log(1-\sinh x)}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
Svolgimento.
(a) Utilizzando gli sviluppi di Taylor si ha, per $x \to 0$:

$$\arctan x - e^{x^2+x} + \cosh(\alpha x) =$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) - \left[1 + \left(x+x^2\right) + \frac{1}{2}\left(x+x^2\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x+x^2\right)^3 + o\left(\left(x+x^2\right)^3\right)\right] + 1 + \frac{1}{2}(\alpha x)^2 + o\left((\alpha x)^3\right) =$$

$$= x - \frac{x^3}{3} - 1 - x - x^2 - \frac{1}{2}x^2 - x^3 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) + 1 + \frac{1}{2}\alpha^2 x^2 + o(\alpha^3 x^3) = \frac{1}{2}(\alpha^2-3)x^2 - \frac{3}{2}x^3 + o(x^3) + o\left((\alpha x)^3\right).$$

quindi l'ordine è due se $\alpha \neq \pm\sqrt{3}$, mentre è tre se $\alpha = \pm\sqrt{3}$.
(B) Utilzzando sempre gli sviluppi di Taylor si ha:

$$\sin x + \log(1-\sinh x) = x + o(x^2) + \log\left(1 - [x + o(x^2)]\right) =$$

$$= x + o(x^2) - \left(x + o(x^2)\right) - \frac{1}{2}\left(x + o(x^2)\right)^2 + o\left(\left(x+o(x^2)\right)^2\right) = -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2).$$

Quindi si ha:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - e^{x^2+x} + \cosh(\alpha x)}{\sin x + \log(1-\sinh x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}(\alpha^2-3)x^2 - \frac{3}{2}x^3 + o(x^3) + o\left((\alpha x)^3\right)}{-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)} = 3 - \alpha^2$$

Esercizio 3 Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale

$$\int_0^{1/2} \frac{x e^{3x}}{(e^{3x}-1)^{\alpha/4}}\, dx$$

converge e calcolarlo per $\alpha = 2$.
Svolgimento.
Poniamo $g(x) = \frac{xe^{3x}}{(e^{3x}-1)^{\alpha/4}}$ e osserviamo che, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, g è continua in $(0,1]$ ed è positiva. Bisogna quindi studiare la convergenza dell'integrale in 0. Si ha, per $x \to 0^+$,

$$g(x) = \frac{xe^{3x}}{(3x+o(x))^{\alpha/4}} \sim \left(\frac{1}{3^{\alpha/4}}\right)\frac{1}{x^{\frac{\alpha}{4}-1}}$$

Quindi $g(x)$ è integrabile in $x=0$ se e solo se $\frac{\alpha}{4} - 1 < 1$ quindi, se e solo se $\alpha < 8$.

Fissiamo ora $\alpha = 2$, si ha:

$$\int_0^{1/2} \frac{xe^{3x}}{\sqrt{e^{3x}-1}}\, dx$$

Una primitiva di $\frac{e^{3x}}{\sqrt{e^{3x}-1}}$ è $\frac{2}{3}\sqrt{e^{3x}-1}$. Integrando per parti si ha:

$$\int \frac{xe^{3x}}{\sqrt{e^{3x}-1}}\, dx = \frac{2}{3}x\sqrt{e^{3x}-1} - \frac{2}{3}\int \sqrt{e^{3x}-1}dx.$$

Utilizzando la sostituzione $y^2 = e^{3x}-1$ si ha:

$$\int \sqrt{e^{3x}-1}dx = \frac{2}{3}\int \frac{y^2}{y^2+1}dy = \frac{2}{3}\int \left(1 - \frac{1}{y^2+1}\right) dy = \frac{2}{3}(y - \arctan(y)) + \text{cost.}$$

Tornado alla variabile x si ha:

$$\int \frac{xe^{3x}}{\sqrt{e^{3x}-1}}\, dx = \frac{2}{3}x\sqrt{e^{3x}-1} - \frac{4}{9}\sqrt{e^{3x}-1} + \frac{4}{9}\arctan\sqrt{e^{3x}-1} + \text{cost.}$$

Da cui

$$\int_0^{1/2} \frac{xe^{3x}}{\sqrt{e^{3x}-1}}\, dx = \frac{1}{9}\sqrt{(e^{3/2}-1)} + \frac{4}{9}\arctan\sqrt{(e^{3/2}-1)}$$

Esercizio 4 Si risolva la disequazione

$$\mathrm{Im}\Big(i(\bar{z} - i + 2)^2\Big) \leq \mathrm{Re}\Big((z - 1 + i)^2\Big)$$

e se ne disegni l'insieme delle soluzioni nel piano di Gauss.
Svolgimento.

Sia $z = x + iy$, quindi $\bar{z} = x - iy$. Si ha:

$$\mathrm{Im}\Big(i(\bar{z}-i+2)^2\Big) = \mathrm{Im}\Big(i\left[(x+2) - i(y+1)\right]^2\Big) = \mathrm{Im}\Big(i\left[(x+2)^2 - (y+1)^2 - 2i(x+2)(y+1)\right]\Big) = (x+2)^2-(y+1)^2$$

$$\mathrm{Re}\Big((z-1+i)^2\Big) = \mathrm{Re}\Big(\left[(x-1)^2 + i(y+1)^2\right]\Big) = \mathrm{Re}\Big((x-1)^2-(y+1)^2+2i(x-1)(y+1)\Big) = (x-1)^2-(y+1)^2$$

Quindi dobbiamo avere:

$$(x+2)^2 - (y+1)^2 \leq (x-1)^2 - (y+1)^2,$$

$$x^2 + 4 + 4x \leq x^2 + 1 - 2x$$

$$x \leq -\frac{1}{2}$$

Le soluzioni della disequazione sono perciò il semipiano $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}z \leq -\frac{1}{2}\}$ (vedi la figura (6)).

Figura 6: soluzioni esercizio 4, Tema 4.

TEMA 4

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{-1}{\sin(x/3)} e^{-\left(\frac{1}{|\tan(x/3)|}\right)}$$

nell'intervallo $[-3\pi, 3\pi]$.
(a) Si determini il dominio D di f; si determinino i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti; se ne studino la continuità e gli eventuali prolungamenti per continuità;
(b) se ne studi la derivabilità, si calcoli la derivata e si studi la monotonia di f; si determinino gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e si calcolino i limiti significativi di f';
(c) si dimostri che f è periodica, se ne calcoli il periodo e si disegni un grafico qualitativo di f (ripetendolo per periodicità).
Svolgimento.

Esercizio 2 (a) Calcolare l'ordine di infinitesimo di

$$1 + \log(1 + x + x^2) - \cosh(\alpha x) - \sinh x$$

per $x \to 0$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
(b) calcolare il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 + \log(1 + x + x^2) - \cosh(\alpha x) - \sinh x}{\log(1 + \arctan x) - \sinh x}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
Svolgimento.

Esercizio 3 Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale

$$\int_0^1 \frac{x e^{x/3}}{(e^{x/3} - 1)^{2\alpha}} \, dx$$

converge e calcolarlo per $\alpha = 1/4$.
Svolgimento.

Esercizio 4 Si risolva la disequazione

$$\mathrm{Im}\Big(i(\bar{z} + i - 1)^2\Big) \geq \mathrm{Re}\Big((z - 2 - i)^2\Big)$$

e se ne disegni l'insieme delle soluzioni nel piano di Gauss.
Svolgimento.