ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione, Canali 2, 3, 4

Appello del 18.09.2015

TEMA 2

Esercizio 1 [**9 punti**] Si consideri la funzione

$$f(x) = 2 - x - \frac{x-2}{\log|x-2|}$$

(a) Determinare le eventuali simmetrie ed il dominio D di f, i limiti di f agli estremi di D e i punti in cui è possibile prolungarla per continuità;
(b) determinare gli eventuali asintoti di f;
(c) studiare la derivabilità di f, studiarne la monotonia e determinarne gli eventuali punti di estremo relativo;
(d) studiare graficamente il segno di f;
(e) calcolare i limiti significativi di f';
(f) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [**9 punti**] Calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sinh\log(1-x^2) - \cos(\alpha x) + 1 - xe^{-1/x}}{x^4 - x^6\log x}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3 [**9 punti**] Si determinino tutti i parametri $\alpha, \beta > 0$ tali che l'integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^\alpha (x + 4\sqrt{x-1} + 2)^\beta}\, dx$$

converge e lo si calcoli per $\alpha = 1/2$ e $\beta = 1$.

Esercizio 4 [**5 punti**] Si risolva la disequazione

$$\mathrm{Re}\,(z-1)\Big(\mathrm{Re}\,(\bar{z}^2) - 2\mathrm{Re}\,(z^2) + 2\big(\mathrm{Im}\,(iz)\big)^2\Big) \geq \mathrm{Re}\Big(z - \frac{2}{1-i}\Big)$$

e se ne disegni l'insieme delle soluzioni nel piano di Gauss.

NB: con log si indica il logaritmo in base e.

Tempo a disposizione: tre ore. Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo. Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.

Soluzione del Tema 2 del 18/09/2015

Esercizio 1

Funzione:

$$f(x) = 2-x - \frac{x-2}{\log|x-2|}.$$

- Dominio: $x \neq 2$ per la definizione del logaritmo

  $|x-2| \neq 1 \iff x \neq 1$ e $x \neq 3$ per il denominatore

  $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1,2,3\}$

- Simmetrie: Consideriamo la funzione traslata

$$g(x) = f(x+2) = -x - \frac{x}{\log|x|} = -x\left(1 + \frac{1}{\log|x|}\right)$$

La funzione g è dispari: $g(-x) = -g(x)$,
quindi f è dispari rispetto alla retta verticale $x=2$.

Nel seguito basta studiare f per $x \geq 2$.

- Limiti:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+}\left(2-x + \frac{2-x}{\log(x-2)}\right) = 0$$

in quanto $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} \frac{t}{\log t} \overset{H}{=} \lim_{t\to 0^+}\frac{1}{1/t} = 0$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = -1 + \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = -1 + \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty \quad \text{in quanto} \quad \lim_{t\to\infty}\frac{t}{\log t} = \infty.$$

- Prolungamenti. Ponendo

$$f(2) := 0$$

si ottiene una funzione continua nel dominio esteso $\mathbb{R}\setminus\{1,3\}$.

- Derivabilità: f è derivabile su $\mathbb{R}\setminus\{1,2,3\}$ in quanto quoziente e somma di funzioni derivabili.
Studiamo poi la derivabilità in $x=2$,

- Calcolo di $f'(x)$:

$$f'(x) = -1 - \frac{\log|x-2| - (x-2)\frac{1}{x-2}}{(\log|x-2|)^2}$$

$$= -1 - \frac{1}{\log|x-2|} + \frac{1}{(\log|x-2|)^2}$$

$$= \frac{-(\log|x-2|)^2 - \log|x-2| + 1}{(\log|x-2|)^2}$$

- Monotonia. Mi limito ad $x \geq 2$.

$$f'(x) \geq 0 \iff -(\log(x-2))^2 - \log(x-2) + 1 \geq 0$$

Poniamo $t = \log(x-2) \in \mathbb{R}$ per $x>2$.

Risolvo $-t^2 - t + 1 \geq 0 \iff t^2 + t - 1 \leq 0$

Radici

$$t_\pm = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Diseq. verificata se e solo se

$$t_- \leq t \leq t_+$$

Passando alla x:

$$\log(x-2) \leq t_+ \iff x \leq 2 + e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$$

ed anche

$$\log(x-2) \geq t_- \iff x \geq 2 + e^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}.$$

Dunque

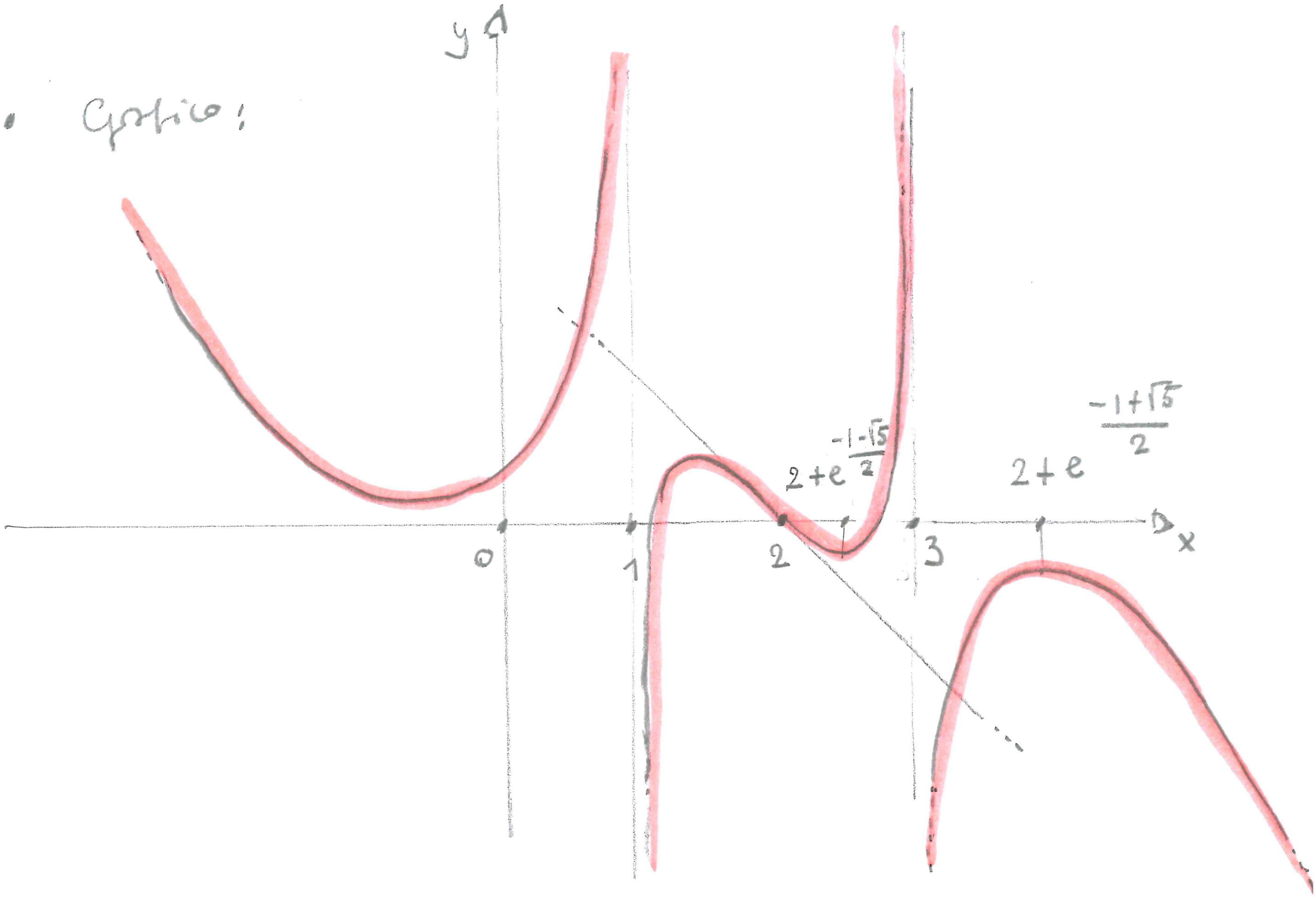
	2 — $2+e^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}$	$2+e^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}$ — 3	3 — $2+e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$	$2+e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$ —
$f'(x)$	$- - -$	$+++$	$+++$	$- - -$
$f(x)$	$\downarrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\downarrow$
	decresce	cresce	cresce	decresce

Quindi

$2 + e^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}$ p.to min. locale

$2 + e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$ p.to max locale

• Grafico:



• Asintoti: $x=1$ e $x=3$ Asintoti verticali

Cerco Asintoto obliquo a $+\infty$:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2}{x} - 1 - \frac{1-2/x}{\log|x-2|}\right) = -1$$

$$q = \lim_{x\to\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to\infty} 2 - \cancel{x} - \frac{x-2}{\log|x-2|} + \cancel{x}$$

$$= -\infty$$

Non c'è.

• $f\left(2+e^{\frac{-1+\sqrt5}{2}}\right) = -e^{\frac{-1+\sqrt5}{2}} - \dfrac{e^{\frac{-1+\sqrt5}{2}}}{\frac{\sqrt5-1}{2}} < 0$

- Studio del segno limitatamente a $x \geq 2$.

Vedo dal grafico che esiste $x_0 \in \left(2+e^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}, 3\right)$ tale che $f(x) > 0$ per $x \in (x_0, 3)$ ed $f(x) \leq 0$ altrove.

- Limiti di $f'(x)$:

$$\lim_{x \to 2} f'(x) = \lim_{x \to 2} \left(-1 - \frac{1}{\log|x-2|} + \frac{1}{(\log|x-2|)^2}\right) = -1$$

Quindi f è derivabile in $x = 2$ con

$$f'(2) = -1.$$

Esercizio 2 Calcolare il limite, con $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$L = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sinh(\log(1-x^2)) - \cos(\alpha x) + 1 - x e^{-1/x}}{x^4 - x^6 \log x}$$

Soluzione. Siccome $x \log x \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0$ abbiamo

$$x^6 \log x = o(x^4)$$

Quindi il denominatore è $x^4 (1 + o(1))$
infinitesimo

Sappiamo che $\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x^n} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Quindi $x e^{-1/x} = o(x^n)$ per $x \to 0^+$ per $n \in \mathbb{N}$ che vogliamo.

Sviluppi:

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} + o(t^4) \quad \text{per } t \to 0$$

e quindi

$$\cos(\alpha x) = 1 - \frac{\alpha^2}{2} x^2 + \frac{\alpha^4}{4!} x^4 + o(x^4) \quad x \to 0$$

Poi

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2), \quad t \to 0$$

e quindi

$$\log(1-x^2) = -x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) \quad \text{per } x \to 0$$

Infine

$$\sinh t = t + \frac{t^3}{3!} + o(t^3) \quad \text{per } t \to 0$$

Dunque

$$\sinh(\log(1-x^2)) = \left(-x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right) +$$

$$+ \frac{1}{3}\left(-x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right)^3 + o(x^6)$$

$$= -x^2 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4).$$

Il limite da calcolare è dunque

$$L = \lim_{x \to 0^+} \frac{-x^2 - \frac{1}{2}x^4 \cancel{-1} + \frac{\alpha^2}{2}x^2 - \frac{\alpha^4}{4!}x^4 + o(x^4) \cancel{+1}}{x^4(1+o(1))}$$

1° CASO: $\frac{\alpha^2}{2} = 1 \iff |\alpha| = \sqrt{2}$,

$$L = \lim_{x \to 0^+} \frac{-\frac{1}{2}x^4 - \frac{4}{4!}x^4 + o(x^4)}{x^4(1+o(1))} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 2}$$

$$= -\frac{3+1}{6}$$

$$= -2/3$$

2° CASO: $\frac{\alpha^2}{2} > 1 \iff |\alpha| > \sqrt{2}$

$$L = \lim_{x \to \infty} \frac{(\frac{\alpha^2}{2} - 1)x^2 + o(x^2)}{x^4(1+o(1))} = \left(\frac{\alpha^2}{2} - 1\right) \cdot (+\infty)$$

$$= +\infty$$

3° CASO: $\frac{\alpha^2}{2} < 1 \iff |\alpha| < \sqrt{2}$

$$L = -\infty.$$

□

Esercizio 3 Calcolare tutti gli $\alpha, \beta > 0$ tali che

$$\int_1^\infty \underbrace{\frac{1}{(x-1)^\alpha (x+4\sqrt{x-1}+2)^\beta}}_{=: f(x)} dx < \infty$$

Per $\alpha = 1/2$ e $\beta = 1$ calcolare l'integrale.

Soluzione,

- Convergenza su $(1,2)$. Per confronto asintotico

$$\int_1^2 f(x)\,dx < \infty \iff \int_1^2 \frac{1}{(x-1)^\alpha}\,dx < \infty$$

$$\iff \alpha < 1$$

- Convergenza su $(2,\infty)$. Per confronto asintotico

$$\int_2^\infty f(x)\,dx < \infty \iff \int_2^\infty \frac{1}{x^{\alpha+\beta}}\,dx < \infty$$

$$\iff \alpha + \beta > 1$$

Quindi l'integrale converge se e solo se sono verificate entrambe

$$\begin{cases} \alpha < 1 \\ \alpha + \beta > 1 \end{cases}$$

- $\alpha = 1/2$ e $\beta = 1$ rientra nella convergenza.

Dobbiamo calcolare

$$I = \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x-1}\,(x+4\sqrt{x-1}+2)}\,dx$$

Sostituiamo $y = \sqrt{x-1}$, $dy = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$

$x = 1 \Rightarrow y = 0$

$x = \infty \Rightarrow y = \infty$

Inoltre $y = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow y^2 = x-1 \Leftrightarrow x = y^2+1$.

Dunque

$$I = \int_0^\infty \frac{1}{y^2+1+4y+2}\,2\,dy$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{(y+2)^2-4+3}\,2\,dy$$

$$= \int_0^\infty \frac{2\,dy}{(y+1)(y+3)}$$

$$= 2\int_0^\infty \left(\frac{A}{y+1} + \frac{B}{y+3}\right) dy$$

dove

$$A(y+3) + B(y+1) = 1$$

$$\Updownarrow$$

$$A = -B \quad e \quad -3B+B = 1$$

ovvero $B = -1/2$

$$I = 2\int_0^\infty \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y+1} - \frac{1}{y+3}\right) dy$$

$$= \Big[\log|y+1| - \log|y+3|\Big]_{y=0}^{y=\infty}$$

$$= \left[\log\frac{y+1}{y+3}\right]_0^\infty = -\log\frac{1}{3} = \log 3.$$

Esercizio 4 Risolvere per $z \in \mathbb{C}$ la disequazione

$$\mathrm{Re}(z-1)\left(\mathrm{Re}(\bar{z}^2) - 2\,\mathrm{Re}(z^2) + 2(\mathrm{Im}(iz))^2\right) \geq$$
$$\geq \mathrm{Re}\left(z - \frac{2}{1-i}\right)$$

Soluzione. Sia $z = x+iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$.
Conti:

$$\mathrm{Re}(z-1) = x-1$$
$$\mathrm{Re}(\bar{z}^2) = \mathrm{Re}((x-iy)^2) = \mathrm{Re}(x^2-y^2-2ixy) = x^2-y^2$$
$$\mathrm{Re}(z^2) = \mathrm{Re}((x+iy)^2) = \mathrm{Re}(x^2-y^2+2ixy) = x^2-y^2$$
$$(\mathrm{Im}(iz))^2 = (\mathrm{Im}(ix-y))^2 = x^2$$

Poi
$$\frac{2}{1-i} = \frac{2}{1-i}\,\frac{1+i}{1+i} = \frac{2+2i}{1+1} = 1+i$$

e quindi
$$\mathrm{Re}\left(z - \frac{2}{1-i}\right) = \mathrm{Re}(x+iy-1-i) = x-1$$

La disequazione è:

$$(x-1)\left(-x^2+y^2+2x^2\right) \geq x-1$$

- Se $x=1$ è verificata per ogni $y \in \mathbb{R}$
- Se $x>1$ è equivalente a

$$x^2+y^2 \geq 1 \iff$$ Fuori dal cerchio di raggio 1 centrato in 0

Quindi è tutto $x>1$ nel piano

• Se $x<1$ la disequazione è equivalente a

$$x^2+y^2 \leq 1$$

Conclusione