# Analisi 2

Roberto Monti

Appunti del Corso - Versione del 14 Aprile 2011

# Indice

Capitolo 1. Teoria dell'integrale di Riemann. Integrali generalizzati 5
1. Integrali impropri su intervallo illimitato 5
2. Convergenza assoluta 7
3. Integrali oscillatori 8
4. Integrali impropri di funzioni non limitate 9
5. Esercizi 10

CAPITOLO 1

# Teoria dell'integrale di Riemann. Integrali generalizzati

## 1. Integrali impropri su intervallo illimitato

DEFINIZIONE 1.1. Siano $a \in \mathbb{R}$ ed $f\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione tale che la restrizione $f : [a,M] \to \mathbb{R}$ sia (limitata e) Riemann-integrabile per ogni $a \le M < \infty$. Diciamo che $f$ è *integrabile in senso improprio su* $[a,\infty)$ se esiste finito il limite

$$I = \lim_{M\to\infty} \int_a^M f(x)dx. \tag{1.1}$$

In questo caso, chiamiamo il numero reale

$$\int_a^\infty f(x)dx = I$$

*integrale improprio di $f$ su* $[a,\infty)$ ovvero diciamo che l'integrale improprio *converge* Se il limite non esiste oppure esiste ma infinito diremo che l'integrale improprio di $f$ *diverge*.

L'integrale improprio eredità dall'integrale di Riemann le proprietà di linearità, di monotonia e di decomposizione del dominio.

ESEMPIO 1.2. Studiamo la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro reale $\alpha > 0$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx.$$

Nel caso $\alpha \neq 1$ si ha

$$\int_1^M \frac{1}{x^\alpha}dx = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_{x=1}^{x=M} = \frac{M^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}$$

e quindi:

a) Se $\alpha > 1$ l'integrale converge

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx = \lim_{M\to\infty} \frac{M^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} = \frac{1}{\alpha-1};$$

b) Se $0 < \alpha < 1$ l'integrale diverge

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx = \lim_{M\to\infty} \frac{M^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} = \infty.$$

Nel caso $\alpha = 1$ si ha per ogni $M > 1$

$$\int_1^M \frac{1}{x}dx = \log M,$$

e quindi l'integrale diverge

$$\int_1^\infty \frac{1}{x} dx = \lim_{M\to\infty} \log M = \infty.$$

□

Osserviamo che se $f \geq 0$ è una funzione non negativa su $[0,\infty)$, allora il limite in (1.1) esiste finito oppure infinito. Infatti, la funzione

$$I(M) = \int_a^M f(x)dx$$

è monotona per $M \geq a$ e dunque ha limite per $M \to \infty$.

TEOREMA 1.3 (Criterio del confronto). Siano $f, g : [a,\infty) \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, due funzioni Riemann-integrabili su ogni intervallo $[a, M] \subset \mathbb{R}$ con $a \leq M < \infty$. Supponiamo che esista $\bar{x} \geq a$ tale che $0 \leq f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \geq \bar{x}$. Allora:

a) $\displaystyle\int_a^\infty g(x)dx < \infty \quad \Rightarrow \quad \int_a^\infty f(x)dx < \infty$;

b) $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx = \infty \quad \Rightarrow \quad \int_a^\infty g(x)dx = \infty$.

Dim. Senza perdere di generalità si può supporre $\bar{x} = a$. Per la monotonia dell'integrale di Riemann, si ha per ogni $M \geq a$:

$$\int_a^M f(x)dx \leq \int_a^M g(x)dx.$$

Le affermazioni a) e b) seguono passando al limite per $M \to \infty$.

TEOREMA 1.4 (Criterio del confronto asintotico). Siano $f, g : [a,\infty) \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, due funzioni Riemann–integrabili su ogni intervallo $[a, M]$, $M \geq a$. Supponiamo che risulti $g(x) > 0$ per ogni $x \geq a$ e che esista finito e diverso da zero il limite

$$L = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \neq 0.$$

Allora:

$$\int_a^\infty f(x)dx \quad \text{converge} \quad \text{se e solo se} \quad \int_a^\infty g(x)dx \quad \text{converge.}$$

Dim. Supponiamo ad esempio $0 < L < \infty$. Allora, per il Teorema della permanenza del segno esiste $\bar{x} \geq a$ tale che per ogni $x \geq \bar{x}$ si ha

$$\frac{L}{2} \leq \frac{f(x)}{g(x)} \geq 2L.$$

Siccome $g > 0$, si può riordinare la disuguaglianza ottenendo $\frac{L}{2} \leq f(x) \leq 2Lg(x)$ per ogni $x \geq \bar{x}$. La tesi segue dal Teorema del confronto.

ESEMPIO 1.5. Studiamo la convergenza dell'integrale improprio

$$I_\alpha = \int_1^\infty \frac{x^{\alpha+1}}{x+1} \log\Big(1 + \frac{1}{x}\Big) dx$$

al variare del parametro reale $\alpha \in \mathbb{R}$. Ricordiamo lo sviluppo infinitesimale del logaritmo

$$\log\Big(1+\frac{1}{x}\Big) = \frac{1}{x} + o\Big(\frac{1}{x}\Big)$$

per $x \to \infty$, dove $o(1/x)$ è un errore che converge a zero più velocemente di $1/x$ quando $x \to \infty$. Allora la funzione integranda è

$$f(x) = \frac{x^\alpha}{1+1/x}\log\Big(1+\frac{1}{x}\Big) = \frac{1}{x^{1-\alpha}}(1+o(1)).$$

Scelta la funzione di confronto $g(x) = \frac{1}{x^{1-\alpha}}$, risulta $g(x) > 0$ per $x > 0$ e inoltre

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \neq 0.$$

Siccome l'integrale

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^{1-\alpha}}dx$$

converge se e solo se $\alpha < 0$, l'integrale in esame pure converge se e solo se $\alpha < 0$. Ad esempio, nel caso $\alpha = -2$ con un conto lasciato come esercizio si può calcolare esplicitamente

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2+x}\log\Big(1+\frac{1}{x}\Big)dx = \log 2.$$

## 2. Convergenza assoluta

Definizione 2.1. Siano $a \in \mathbb{R}$ ed $f\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione tale che la restrizione $f : [a, M] \to \mathbb{R}$ sia (limitata e) Riemann–integrabile per ogni $a \le M < \infty$. Diciamo che $f$ è *assolutamente integrabile su* $[a,\infty)$ se converge l'integrale improprio

$$\int_a^\infty |f(x)|dx < \infty.$$

In questo caso, diciamo che l'integrale improprio $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ *converge assolutamente.*

Teorema 2.2. Sia $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione (limitata e) Riemann–integrabile su ogni intervallo della forma $[a, M]$, $M \ge a$. Se $f$ è assolutamente integrabile su $[a,\infty)$ allora è integrabile in senso improprio su $[a,\infty)$ e inoltre

$$\Big|\int_a^\infty f(x)dx\Big| \le \int_a^\infty |f(x)|dx. \tag{2.2}$$

Dim. Definiamo le funzioni $f^+, f^- : [a,\infty) \to \mathbb{R}$

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \quad \text{e} \quad f^-(x) = \min\{f(x), 0\}, \quad x \ge a.$$

Chiaramente $f(x) = f^+(x) + f^-(x)$ e $|f(x)| = f^+(x) - f^-(x)$ per ogni $x \ge a$. È noto, inoltre, che le funzioni $f^+, f^-$ sono Riemann–integrabili su ogni intervallo $[a, M]$. Per il Teorema del confronto gli integrali impropri

$$\int_a^\infty f^+(x)dx \quad \text{e} \quad \int_a^\infty f^-(x)dx$$

convergono. Passando al limite per $M \to \infty$ nell'identità

$$\int_a^M f(x)dx = \int_a^M \big(f^+(x) + f^-(x)\big)dx = \int_a^M f^+(x)dx + \int_a^M f^-(x)dx$$

si ottiene la convergenza dell'integrale improprio di $f$ su $[0, \infty)$. Passando al limite nella disuguaglianza

$$\begin{aligned} \Big|\int_a^M f(x)dx\Big| &= \Big|\int_a^M f^+(x)dx + \int_a^M f^-(x)dx\Big| \\ &\le \int_a^M |f^+(x)|dx + \int_a^M |f^-(x)|dx = \int_a^M |f(x)|dx \end{aligned}$$

si ottiene la (2.2).

Esempio 2.3. L'integrale improprio $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ non converge assolutamente, ovvero

$$\int_0^\infty \Big|\frac{\sin x}{x}\Big|dx = \infty.$$

Infatti, sul generico intervallo $[k\pi + \pi/4, k\pi + 3\pi/4]$, $k = 0, 1, 2, ...$, risulta

$$|\sin x| \ge \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad \frac{1}{x} \ge \frac{1}{k\pi + 3\pi/4},$$

e dunque

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \Big|\frac{\sin x}{x}\Big|dx \ge \frac{\sqrt{2}\pi}{8(k\pi + 3\pi/4)}.$$

Si deduce che

$$\int_0^\infty \Big|\frac{\sin x}{x}\Big|dx \ge \frac{\sqrt{2}\pi}{8}\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k\pi + 3\pi/4} = \infty.$$

## 3. Integrali oscillatori

Tipici esempi di integrali oscillatori sono

$$\int_0^\infty f(x)\sin x dx, \quad \int_0^\infty f(x)\cos x dx,$$

ovvero l'integrale a valori complessi

$$\int_0^\infty f(x)e^{ix}dx = \int_0^\infty f(x)\cos x dx + i\int_0^\infty f(x)\sin x dx,$$

dove $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ è una funzione non negativa, $f \ge 0$.

Il seguente teorema fornisce condizioni sufficiente per la convergenza di integrali di questo tipo.

Teorema 3.1 (Criterio per integrali oscillatori). Siano $f \in C([a, \infty))$ e $g \in C^1([a, \infty))$, $a \in \mathbb{R}$, due funzioni con le seguenti proprietà:

i) $f = F'$ con primitiva $F \in C^1([a, \infty))$ limitata;
ii) $g' \le 0$ e $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$.

Allora l'integrale improprio

$$\int_a^\infty f(x)g(x)dx$$

converge.

Dim. Per ogni $M > a$ si ottiene con un'integrazione per parti:

$$\begin{aligned}\int_a^M f(x)g(x)dx &= \Big[F(x)g(x)\Big]_{x=a}^{x=M} - \int_a^M F(x)g'(x)dx \\ &= F(M)g(M) - F(a)g(a) - \int_a^M F(x)g'(x)dx.\end{aligned}$$

Siccome $F$ è limitata e $g$ è infinitesima per $M \to \infty$, si ha

$$\lim_{M\to\infty} F(M)g(M) = 0.$$

D'altra parte, siccome $g' \le 0$ si trova

$$\begin{aligned}\int_a^M |F(x)g'(x)|dx &\le \sup_{x\in[a,\infty)} |F(x)| \int_a^M |g'(x)|dx = -\sup_{x\in[a,\infty)} |F(x)| \int_a^M g'(x)dx \\ &= \big(g(a) - g(M)\big) \sup_{x\in[a,\infty)} |F(x)|,\end{aligned}$$

e dunque, usando nuovamente il fatto che $g$ è infinitesima

$$\int_a^\infty |F(x)g'(x)|dx \le g(a) \sup_{x\in[a,\infty)} |F(x)| < \infty.$$

Dal momento che la funzione $Fg'$ è assolutamente integrabile su $[a, \infty)$, per il Criterio della convergenza assoluta esiste finito anche il limite

$$\lim_{M\to\infty} \int_a^M F(x)g'(x)dx.$$

Questo termina la prova del teorema.

Esempio 3.2. Usando il Teorema 3.1 sugli integrali oscillatori, si vede che per ogni scelta del parametro $\alpha > 0$ l'integrale improprio

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$$

converge. Infatti, la funzione $f(x) = \sin x$ ha primitiva limitata $F(x) = -\cos x$ e la funzione $g(x) = 1/x^\alpha$ ha derivata negativa per $x > 0$ ed è infinitesima per $x \to \infty$.

## 4. Integrali impropri di funzioni non limitate

Definizione 4.1. Sia $f\colon (a, b] \to \mathbb{R}$, $-\infty < a < b < \infty$, una funzione (limitata e) Riemann–integrabile su ogni intervallo della forma $[a + \varepsilon, b]$ con $0 < \varepsilon < b - a$. Diciamo che $f$ è *integrabile in senso improprio su* $(a, b]$ se esiste finito il limite

$$I = \lim_{\varepsilon\to0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

In questo caso, diciamo che l'integrale improprio di $f$ su $(a, b]$ *converge* e poniamo

$$\int_a^b f(x)dx = I.$$

Lo studio degli integrali impropri di funzioni come nella definizione precedente si può ricondurre allo studio di integrali impropri su intervallo illimitato tramite il cambiamento di variabile $y = \frac{b-a}{x-a}$ che porta alla trasformazione formale di integrali

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\int_1^\infty f\Big(a + \frac{b-a}{y}\Big)\frac{dy}{y^2}.$$

Esempio 4.2. Con una discussione analoga a quella svolta nell'Esempio 1.2 si deduce che, al variare del parametro reale $\alpha > 0$, l'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx$$

converge se e solo se $\alpha < 1$.

Enunciamo, senza dimostrazione, un Teorema del confronto asintotico per integrali di funzioni non limitate.

Teorema 4.3 (Criterio del confronto asintotico). Siano $f, g : (a, b] \to \mathbb{R}$, $-\infty < a < b < \infty$, due funzioni (limitate e) Riemann-integrabili su ogni intervallo della forma $[a+\varepsilon, b]$, $0 < \varepsilon < b - a$. Supponiamo che:

i) $\lim\limits_{x\to a^+} g(x) = \infty$;

ii) il seguente limite esiste finito e diverso da zero

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} \neq 0.$$

Allora:

$$\int_a^b f(x)dx \quad \text{converge} \quad \Leftrightarrow \quad \int_a^b g(x)dx \quad \text{converge.}$$

## 5. Esercizi

Esercizio 1. Al variare del parametro $\alpha \geq 0$, studiare la convergenza e la convergenza assoluta dell'integrale improprio

$$\int_1^\infty \frac{\sin x \log x}{x^\alpha}dx.$$

Questo esercizio è stato risolto in classe. La risposta è la seguente: per $\alpha > 1$ si ha convergenza assoluta (e quindi anche semplice); per $0 < \alpha \leq 1$ non si ha convergenza assoluta ma c'è convergenza semplice; per $\alpha = 0$ non c'è convergenza semplice.

Esercizio 2. Calcolare i seguenti integrali impropri

$$1)\ \int_0^\infty \frac{\log x}{(x+1)^2}dx; \quad 2)\ \int_0^\infty x^{-2}e^{-\frac{1}{x}}\,dx; \quad 3)\ \int_0^\infty e^{-\beta x}\cos(\alpha x)\,dx, \quad \beta > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 3. Stabilire se convergono i seguenti integrali impropri

$$1)\ \int_0^{\infty} \sin^2 x\, dx; \quad 2)\ \int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-\sin(x)}}\, dx; \quad 3)\ \int_0^1 \frac{\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

Esercizio 4. Stabilire se convergono assolutamente i seguenti integrali impropri

$$1)\ \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{1+x^2} dx; \quad 2)\ \int_0^{\infty} x^2 e^{-\sqrt{x}} \cos x\, dx; \quad 3)\ \int_1^{\infty} \Big(\frac{1}{x} - \tan\frac{1}{x}\Big) \sin x\, dx.$$

Esercizio 5. Calcolare tutti gli $\alpha > 0$ tali che converga ciascuno dei seguenti integrali impropri

$$1)\ \int_0^1 \frac{(1-\cos x)^{\alpha}}{\tan x - x}\, dx; \quad 2)\ \int_0^1 \frac{\sin(x^{\alpha})}{\log(1+x)}\, dx;$$

$$3)\ \int_0^{\infty} \frac{\arctan\sqrt{x} - \pi/2}{x^{\alpha}}\, dx; \quad 4)\ \int_2^{\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\log^{\alpha} x} dx.$$

Esercizio 6. Studiare la convergenza dei seguenti integrali oscillatori

$$1)\ \int_2^{\infty} \frac{\sin x}{\log x}\, dx; \quad 2)\ \int_1^{\infty} \sin x \arcsin\frac{1}{x}\, dx; \quad 3)\ \int_0^{\infty} x \sin(x^4)\, dx.$$

Esercizio 7. i) Determinare tutti i parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che il seguente integrale improprio converga

$$\int_0^{\infty} \frac{1+x^{\beta}}{x^{\alpha}(1+x^2)} dx.$$

ii) Rappresentare i parametri ammissibili nel piano cartesiano $\alpha\beta$.