Analisi 2

Roberto Monti

Appunti del Corso - Versione del 15 Aprile 2011

Indice

CAPITOLO 1

Teoria dell'integrale di Riemann. Integrali generalizzati

1. Integrali impropri su intervallo illimitato

DEFINIZIONE 1.1. Siano $a \in \mathbb{R}$ ed $f\colon [a, \infty) \to \mathbb{R}$ una funzione tale che la restrizione $f : [a, M] \to \mathbb{R}$ sia (limitata e) Riemann-integrabile per ogni $a \leq M < \infty$. Diciamo che f è *integrabile in senso improprio su* $[a, \infty)$ se esiste finito il limite

$$I = \lim_{M \to \infty} \int_a^M f(x)dx. \tag{1.1}$$

In questo caso, chiamiamo il numero reale

$$\int_a^\infty f(x)dx = I$$

integrale improprio di f *su* $[a, \infty)$ ovvero diciamo che l'integrale improprio *converge* Se il limite non esiste oppure esiste ma infinito diremo che l'integrale improprio di f *diverge.*

L'integrale improprio eredità dall'integrale di Riemann le proprietà di linearità, di monotonia e di decomposizione del dominio.

ESEMPIO 1.2. Studiamo la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro reale $\alpha > 0$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx.$$

Nel caso $\alpha \neq 1$ si ha

$$\int_1^M \frac{1}{x^\alpha} dx = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_{x=1}^{x=M} = \frac{M^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha}$$

e quindi:

a) Se $\alpha > 1$ l'integrale converge

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{M \to \infty} \frac{M^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1};$$

b) Se $0 < \alpha < 1$ l'integrale diverge

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{M \to \infty} \frac{M^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} = \infty.$$

Nel caso $\alpha = 1$ si ha per ogni $M > 1$

$$\int_1^M \frac{1}{x} dx = \log M,$$

e quindi l'integrale diverge

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}dx = \lim_{M\to\infty} \log M = \infty.$$

□

Osserviamo che se $f \geq 0$ è una funzione non negativa su $[0,\infty)$, allora il limite in (1.1) esiste finito oppure infinito. Infatti, la funzione

$$I(M) = \int_a^M f(x)dx$$

è monotona per $M \geq a$ e dunque ha limite per $M \to \infty$.

Teorema 1.3 (Criterio del confronto). Siano $f, g : [a,\infty) \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, due funzioni Riemann-integrabili su ogni intervallo $[a, M] \subset \mathbb{R}$ con $a \leq M < \infty$. Supponiamo che esista $\bar{x} \geq a$ tale che $0 \leq f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \geq \bar{x}$. Allora:

a) $\displaystyle\int_a^\infty g(x)dx < \infty \quad \Rightarrow \quad \int_a^\infty f(x)dx < \infty;$

b) $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx = \infty \quad \Rightarrow \quad \int_a^\infty g(x)dx = \infty.$

Dim. Senza perdere di generalità si può supporre $\bar{x} = a$. Per la monotonia dell'integrale di Riemann, si ha per ogni $M \geq a$:

$$\int_a^M f(x)dx \leq \int_a^M g(x)dx.$$

Le affermazioni a) e b) seguono passando al limite per $M \to \infty$.

Teorema 1.4 (Criterio del confronto asintotico). Siano $f, g : [a,\infty) \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, due funzioni Riemann–integrabili su ogni intervallo $[a, M]$, $M \geq a$. Supponiamo che risulti $g(x) > 0$ per ogni $x \geq a$ e che esista finito e diverso da zero il limite

$$L = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \neq 0.$$

Allora:

$$\int_a^\infty f(x)dx \quad \text{converge} \quad \text{se e solo se} \quad \int_a^\infty g(x)dx \quad \text{converge.}$$

Dim. Supponiamo ad esempio $0 < L < \infty$. Allora, per il Teorema della permanenza del segno esiste $\bar{x} \geq a$ tale che per ogni $x \geq \bar{x}$ si ha

$$\frac{L}{2} \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq 2L.$$

Siccome $g > 0$, si può riordinare la disuguaglianza ottenendo $\frac{L}{2}g(x) \leq f(x) \leq 2Lg(x)$ per ogni $x \geq \bar{x}$. La tesi segue dal Teorema del confronto.

Esempio 1.5. Studiamo la convergenza dell'integrale improprio

$$I_\alpha = \int_1^\infty \frac{x^{\alpha+1}}{x+1} \log\Big(1 + \frac{1}{x}\Big)dx$$

al variare del parametro reale $\alpha \in \mathbb{R}$. Ricordiamo lo sviluppo infinitesimale del logaritmo

$$\log\Big(1 + \frac{1}{x}\Big) = \frac{1}{x} + o\Big(\frac{1}{x}\Big)$$

per $x \to \infty$, dove $o(1/x)$ è un errore che converge a zero più velocemente di $1/x$ quando $x \to \infty$. Allora la funzione integranda è

$$f(x) = \frac{x^\alpha}{1 + 1/x} \log\Big(1 + \frac{1}{x}\Big) = \frac{1}{x^{1-\alpha}}(1 + o(1)).$$

Scelta la funzione di confronto $g(x) = \frac{1}{x^{1-\alpha}}$, risulta $g(x) > 0$ per $x > 0$ e inoltre

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \neq 0.$$

Siccome l'integrale

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^{1-\alpha}} dx$$

converge se e solo se $\alpha < 0$, l'integrale in esame pure converge se e solo se $\alpha < 0$. Ad esempio, nel caso $\alpha = -2$ con un conto lasciato come esercizio si può calcolare esplicitamente

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2 + x} \log\Big(1 + \frac{1}{x}\Big) dx = \log 2.$$

2. Convergenza assoluta

Definizione 2.1. Siano $a \in \mathbb{R}$ ed $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ una funzione tale che la restrizione $f : [a, M] \to \mathbb{R}$ sia (limitata e) Riemann–integrabile per ogni $a \le M < \infty$. Diciamo che f è *assolutamente integrabile su* $[a, \infty)$ se converge l'integrale improprio

$$\int_a^\infty |f(x)| dx < \infty.$$

In questo caso, diciamo che l'integrale improprio $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ *converge assolutamente.*

Teorema 2.2. Sia $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ una funzione (limitata e) Riemann–integrabile su ogni intervallo della forma $[a, M]$, $M \ge a$. Se f è assolutamente integrabile su $[a, \infty)$ allora è integrabile in senso improprio su $[a, \infty)$ e inoltre

$$\Big| \int_a^\infty f(x)dx \Big| \le \int_a^\infty |f(x)|dx. \tag{2.2}$$

Dim. Definiamo le funzioni $f^+, f^- : [a, \infty) \to \mathbb{R}$

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \quad \text{e} \quad f^-(x) = \min\{f(x), 0\}, \quad x \ge a.$$

Chiaramente $f(x) = f^+(x) + f^-(x)$ e $|f(x)| = f^+(x) - f^-(x)$ per ogni $x \ge a$. È noto, inoltre, che le funzioni f^+, f^- sono Riemann–integrabili su ogni intervallo $[a, M]$. Per il Teorema del confronto gli integrali impropri

$$\int_a^\infty f^+(x)dx \quad \text{e} \quad \int_a^\infty f^-(x)dx$$

convergono. Passando al limite per $M \to \infty$ nell'identità

$$\int_a^M f(x)dx = \int_a^M \big(f^+(x) + f^-(x)\big)dx = \int_a^M f^+(x)dx + \int_a^M f^-(x)dx$$

si ottiene la convergenza dell'integrale improprio di f su $[a, \infty)$. Passando al limite nella disuguaglianza

$$\begin{aligned}\Big| \int_a^M f(x)dx \Big| &= \Big| \int_a^M f^+(x)dx + \int_a^M f^-(x)dx \Big| \\ &\leq \int_a^M |f^+(x)|dx + \int_a^M |f^-(x)|dx = \int_a^M |f(x)|dx\end{aligned}$$

si ottiene la (2.2).

Esempio 2.3. L'integrale improprio $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ non converge assolutamente, ovvero

$$\int_0^\infty \Big|\frac{\sin x}{x}\Big|dx = \infty.$$

Infatti, sul generico intervallo $[k\pi + \pi/4, k\pi + 3\pi/4]$, $k = 0, 1, 2, ...$, risulta

$$|\sin x| \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad \frac{1}{x} \geq \frac{1}{k\pi + 3\pi/4},$$

e dunque

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \Big|\frac{\sin x}{x}\Big|dx \geq \frac{\sqrt{2}\pi}{8(k\pi + 3\pi/4)}.$$

Si deduce che

$$\int_0^\infty \Big|\frac{\sin x}{x}\Big|dx \geq \frac{\sqrt{2}\pi}{8} \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k\pi + 3\pi/4} = \infty.$$

3. Integrali oscillatori

Tipici esempi di integrali oscillatori sono

$$\int_0^\infty f(x)\sin x dx, \quad \int_0^\infty f(x)\cos x dx,$$

ovvero l'integrale a valori complessi

$$\int_0^\infty f(x)e^{ix}dx = \int_0^\infty f(x)\cos x dx + i\int_0^\infty f(x)\sin x dx,$$

dove $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ è una funzione non negativa, $f \geq 0$.

Il seguente teorema fornisce condizioni sufficiente per la convergenza di integrali di questo tipo.

Teorema 3.1 (Criterio per integrali oscillatori). Siano $f \in C([a, \infty))$ e $g \in C^1([a, \infty))$, $a \in \mathbb{R}$, due funzioni con le seguenti proprietà:

i) $f = F'$ con primitiva $F \in C^1([a, \infty))$ limitata;
ii) $g' \leq 0$ e $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$.

Allora l'integrale improprio

$$\int_a^\infty f(x)g(x)dx$$

converge.

Dim. Per ogni $M > a$ si ottiene con un'integrazione per parti:

$$\begin{aligned}\int_a^M f(x)g(x)dx &= \big[F(x)g(x)\big]_{x=a}^{x=M} - \int_a^M F(x)g'(x)dx \\ &= F(M)g(M) - F(a)g(a) - \int_a^M F(x)g'(x)dx.\end{aligned}$$

Siccome F è limitata e g è infinitesima per $M \to \infty$, si ha

$$\lim_{M\to\infty} F(M)g(M) = 0.$$

D'altra parte, siccome $g' \leq 0$ si trova

$$\begin{aligned}\int_a^M |F(x)g'(x)|dx &\leq \sup_{x\in[a,\infty)} |F(x)| \int_a^M |g'(x)|dx = - \sup_{x\in[a,\infty)} |F(x)| \int_a^M g'(x)dx \\ &= \big(g(a) - g(M)\big) \sup_{x\in[a,\infty)} |F(x)|,\end{aligned}$$

e dunque, usando nuovamente il fatto che g è infinitesima

$$\int_a^\infty |F(x)g'(x)|dx \leq g(a) \sup_{x\in[a,\infty)} |F(x)| < \infty.$$

Dal momento che la funzione Fg' è assolutamente integrabile su $[a, \infty)$, per il Criterio della convergenza assoluta esiste finito anche il limite

$$\lim_{M\to\infty} \int_a^M F(x)g'(x)dx.$$

Questo termina la prova del teorema.

Esempio 3.2. Usando il Teorema 3.1 sugli integrali oscillatori, si vede che per ogni scelta del parametro $\alpha > 0$ l'integrale improprio

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$$

converge. Infatti, la funzione $f(x) = \sin x$ ha primitiva limitata $F(x) = -\cos x$ e la funzione $g(x) = 1/x^\alpha$ ha derivata negativa per $x > 0$ ed è infinitesima per $x \to \infty$.

4. Integrali impropri di funzioni non limitate

Definizione 4.1. Sia $f\colon (a, b] \to \mathbb{R}$, $-\infty < a < b < \infty$, una funzione (limitata e) Riemann–integrabile su ogni intervallo della forma $[a + \varepsilon, b]$ con $0 < \varepsilon < b - a$. Diciamo che f è *integrabile in senso improprio su* $(a, b]$ se esiste finito il limite

$$I = \lim_{\varepsilon\to0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

In questo caso, diciamo che l'integrale improprio di f su $(a, b]$ *converge* e poniamo

$$\int_a^b f(x)dx = I.$$

Lo studio degli integrali impropri di funzioni come nella definizione precedente si può ricondurre allo studio di integrali impropri su intervallo illimitato tramite il cambiamento di variabile $y = \frac{b-a}{x-a}$ che porta alla trasformazione formale di integrali

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\int_1^\infty f\Big(a + \frac{b-a}{y}\Big)\frac{dy}{y^2}.$$

Esempio 4.2. Con una discussione analoga a quella svolta nell'Esempio 1.2 si deduce che, al variare del parametro reale $\alpha > 0$, l'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx$$

converge se e solo se $\alpha < 1$.

Enunciamo, senza dimostrazione, un Teorema del confronto asintotico per integrali di funzioni non limitate.

Teorema 4.3 (Criterio del confronto asintotico). Siano $f, g : (a, b] \to \mathbb{R}$, $-\infty < a < b < \infty$, due funzioni (limitate e) Riemann-integrabili su ogni intervallo della forma $[a + \varepsilon, b]$, $0 < \varepsilon < b - a$. Supponiamo che:

i) $\lim\limits_{x\to a^+} g(x) = \infty$;

ii) il seguente limite esiste finito e diverso da zero

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} \neq 0.$$

Allora:

$$\int_a^b f(x)dx \quad \text{converge} \quad \Leftrightarrow \quad \int_a^b g(x)dx \quad \text{converge.}$$

5. Esercizi

Esercizio 1. Al variare del parametro $\alpha \geq 0$, studiare la convergenza e la convergenza assoluta dell'integrale improprio

$$\int_1^\infty \frac{\sin x \log x}{x^\alpha}dx.$$

Questo esercizio è stato risolto in classe. La risposta è la seguente: per $\alpha > 1$ si ha convergenza assoluta (e quindi anche semplice); per $0 < \alpha \leq 1$ non si ha convergenza assoluta ma c'è convergenza semplice; per $\alpha = 0$ non c'è convergenza semplice.

Esercizio 2. Calcolare i seguenti integrali impropri

$$1)\ \int_0^\infty \frac{\log x}{(x+1)^2}dx; \quad 2)\ \int_0^\infty x^{-2}e^{-\frac{1}{x}}\,dx; \quad 3)\ \int_0^\infty e^{-\beta x}\cos(\alpha x)\,dx, \quad \beta > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 3. Stabilire se convergono i seguenti integrali impropri

$$1)\ \int_0^\infty \sin^2 x\,dx; \quad 2)\ \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{1-\sin(x)}}\,dx; \quad 3)\ \int_0^1 \frac{\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Esercizio 4. Stabilire se convergono assolutamente i seguenti integrali impropri

$$1)\ \int_0^\infty \frac{\sin x}{1+x^2}dx; \quad 2)\ \int_0^\infty x^2 e^{-\sqrt{x}}\cos x\,dx; \quad 3)\ \int_1^\infty \Big(\frac{1}{x}-\tan\frac{1}{x}\Big)\sin x\,dx.$$

Esercizio 5. Calcolare tutti gli $\alpha > 0$ tali che converga ciascuno dei seguenti integrali impropri

$$1)\ \int_0^1 \frac{(1-\cos x)^\alpha}{\tan x - x}\,dx; \quad 2)\ \int_0^1 \frac{\sin(x^\alpha)}{\log(1+x)}\,dx;$$

$$3)\ \int_0^\infty \frac{\arctan\sqrt{x}-\pi/2}{x^\alpha}\,dx; \quad 4)\ \int_2^\infty \frac{\sin\frac{1}{x}}{\log^\alpha x}dx.$$

Esercizio 6. Studiare la convergenza dei seguenti integrali oscillatori

$$1)\ \int_2^\infty \frac{\sin x}{\log x}\,dx; \quad 2)\ \int_1^\infty \sin x \arcsin\frac{1}{x}\,dx; \quad 3)\ \int_0^\infty x\sin(x^4)\,dx.$$

Esercizio 7. i) Determinare tutti i parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che il seguente integrale improprio converga

$$\int_0^\infty \frac{1+x^\beta}{x^\alpha(1+x^2)}dx.$$

ii) Rappresentare i parametri ammissibili nel piano cartesiano $\alpha\beta$.

CAPITOLO 2

Introduzione alle equazioni differenziali ordinarie

1. Equazioni differenziali lineari del primo ordine

Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto e siano $a, b \in C(I)$ due funzioni continue. Un'equazione differenziale della forma

$$y' + a(x)y = b(x), \quad x \in I, \tag{1.3}$$

si dice equazione lineare del primo ordine. Fissati $x_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}$, possiamo prescrivere il valore della soluzione nel punto x_0:

$$y(x_0) = y_0. \tag{1.4}$$

Il problema di risolvere l'equazione differenziale (1.3) con la *condizione iniziale* (1.4) si chiama *Problema di Cauchy*. L'incognita del problema è una funzione $y \in C^1(I)$.

Dedurremo la formula risolutiva dell'equazione differenziale, e più in generale del Problema di Cauchy, con un argomento euristico. Consideriamo preliminarmente il caso $b = 0$:

$$y' + a(x)y = 0, \quad x \in I. \tag{1.5}$$

In questo caso, l'equazione differenziale si dice *omogenea*. Supponendo $y \neq 0$, ad esempio $y > 0$, l'equazione differenziale (1.5) si può riscrivere nella forma $y'/y = -a(x)$. Una primitiva della funzione y'/y è $\log y$. Dunque, indicando con A una primitiva di a, ovvero $A'(x) = a(x)$ per ogni $x \in I$, abbiamo

$$-A = \log y + d,$$

per qualche costante $d \in \mathbb{R}$. Segue che $y = \exp(-d - A)$ e ponendo $c = \mathrm{e}^{-d}$ troviamo la soluzione

$$y(x) = c\mathrm{e}^{-A(x)}, \quad x \in I. \tag{1.6}$$

Questa funzione risolve l'equazione omogenea per ogni $c \in \mathbb{R}$ (in altri termini la limitazione $y > 0$ può essere lasciata cadere).

Ora cerchiamo una soluzione della forma (1.6) per l'equazione non omogenea (1.3), dove ora $c \in C^1(I)$ è una funzione incognita che deve essere determinata. Questo metodo si chiama "variazione della costante". Inserendo $y' = c'\mathrm{e}^{-A} - ac\mathrm{e}^{-A}$ nell'equazione (1.3) otteniamo

$$c'\mathrm{e}^{-A} = b, \quad \text{ovvero} \quad c' = b\mathrm{e}^{A}.$$

Integrando tale equazione su un intervallo $(x_0, x) \subset I$ otteniamo

$$c(x) = c(x_0) + \int_{x_0}^{x} b(t)\mathrm{e}^{A(t)}dt,$$

e dunque troviamo

$$y(x) = \Big(c(x_0) + \int_{x_0}^{x} b(t)\mathrm{e}^{A(t)}dt\Big)\mathrm{e}^{-A(x)}, \quad x \in I, \tag{1.7}$$

dove $c(x_0) \in \mathbb{R}$ è un numero reale. Per ogni scelta di tale numero, la funzione (1.8) verifica l'equazione differenziale (1.3).

Il numero $c(x_0)$ si può determinare imponendo che l'integrale generale y verifichi la condizione iniziale $y(x_0) = y_0$. Si ottiene $c(x_0) = y_0\mathrm{e}^{A(x_0)}$. Dunque otteniamo la *formula di rappresentazione* per la soluzione del Problema di Cauchy:

$$y(x) = \Big(y_0\mathrm{e}^{A(x_0)} + \int_{x_0}^{x} b(t)\mathrm{e}^{A(t)}dt\Big)\mathrm{e}^{-A(x)}, \quad x \in I, \tag{1.8}$$

Nel prossimo teorema proviamo che il metedo seguito rileva in effetti l'*unica* soluzione del problema di Cauchy.

Teorema 1.1. Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto, $x_0 \in I$, $a, b \in C(I)$ e $y_0 \in \mathbb{R}$. Allora la funzione (1.8) risolve in modo unico il Problema di Cauchy (1.3)+(1.4).

Dim. Che la funzione (1.8) risolva il problema è un conto che ripercorre a ritroso l'argomento euristico. Proviamo che questa soluzione è l'unica.

Sia $z \in C^1(I)$ una soluzione dell'equazione differenziale (1.3) e consideriamo la funzione ausiliaria

$$w(x) = \mathrm{e}^{A(x)}z(x) - \int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}dt,$$

dove A è una primitiva di a. Dal momento che sull'intervallo I risulta

$$w' = (az + z')\mathrm{e}^{A} - b\mathrm{e}^{A} = 0,$$

per il Teorema di Lagrange la funzione w è costante su I, ovvero esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che $w(x) = k \in \mathbb{R}$ per ogni $x \in I$. Dunque, si ha

$$z(x) = \Big(k + \int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}dt\Big)\mathrm{e}^{-A(x)}.$$

D'altra parte, se z risolve anche la condizione iniziale $z(x_0) = y_0$ deve essere $k = y_0\mathrm{e}^{A(x_0)}$ e quindi z coincide con la funzione in (1.8).

2. Equazione differenziali a variabili separabili

Siano $I, J \subset \mathbb{R}$ due intervalli aperti e siano $f \in C(I)$ e $g \in C(J)$ due funzioni continue. Cerchiamo le soluzioni dell'equazione differenziale del primo ordine

$$y' = f(x)g(y), \quad x \in I, \tag{2.9}$$

per qualche intervallo $I_1 \subset I$. Una simile equazione si dice *a variabili separabili.* Eventualmente, fissati un punto $x_0 \in I$ e un valore $y_0 \in J$ possiamo prescrivere la condizione iniziale

$$y(x_0) = y_0. \tag{2.10}$$

Il problema (2.9)+(2.10) si chiama *Problema di Cauchy.*

Osserviamo preliminarmente che se $g(y_0) = 0$ allora la funzione costante $y(x) = y_0$, $x \in I$, è certamente una soluzione dell'equazione differenziale (2.9) che verifica la condizione iniziale.

Siccome vogliamo dividere per g, supponiamo che $g(y_0) \neq 0$. Allora risulta $g \neq 0$ in un intervallo aperto $J_1 \subset J$ che contiene y_0. Possiamo allora dividere e separare le variabili. L'equazione differenziale si riscrive nel seguente modo:

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x), \tag{2.11}$$

dove x varia in un intorno $I_1 \subset I$ del punto x_0 tale che $y(x) \in J_1$ per ogni $x \in I_1$.

Sia $G \in C^1(J_1)$ una primitiva di $1/g(y)$ (nella variabile y), definita nell'intervallo J_1 e dove risulta $g \neq 0$. La funzione G è strettamente monotona, perchè $G'(y) \neq 0$, e pertanto G è invertibile.

Sia poi $F \in C^1(I)$ una primitiva di f. Integrando l'equazione differenziale (2.11) si ottiene

$$G(y(x)) = F(x) + C, \quad x \in I_1. \tag{2.12}$$

Qui, $C \in \mathbb{R}$ è una costante che può essere determinata tramite la condizione iniziale, e precisamente $C = G(y_0) - F(x_0)$.

La soluzione del Problam di Cauchy è dunque

$$y(x) = G^{-1}(F(x) - F(x_0) + G(y_0)), \quad x \in I_1, \tag{2.13}$$

dove $G^{-1} : G(J_1) \to J_1$ è la funzione inversa di G. L'intervallo $I_1 \subset I$ è in generale più piccolo di I.

Il precedente argomento rileva due tipi di soluzione dell'equazione differenziale (2.9): le soluzioni costanti e le soluzioni per cui $g(y) \neq 0$. Potrebbero, tuttavia, esserci altre soluzioni. Se $g \neq 0$ su J, l'argomento prova che la soluzione è necessariamente della forma (2.13).

TEOREMA 2.1. Siano $I, J \subset \mathbb{R}$ due intervalli aperti, $x_0 \in I$ e $y_0 \in J$, e siano $f \in C(I)$, $g \in C(J)$ tali che $g \neq 0$ su J. Allora il Problema di Cauchy (2.9)+(2.10) ha una soluzione unica $y \in C^1(I_1)$ data dalla formula (2.13), per qualche intervallo aperto $I_1 \subset I$ contenente x_0.

La dimostrazione del teorema è contenuta nell'argomento precedente.

ESEMPIO 2.2. Cerchiamo la soluzione del Problema di Cauchy seguente

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1+2x}{\cos y} \\ y(0) = \pi. \end{cases} \tag{2.14}$$

L'equazione differenziale è a variabili separabili $y' = f(x)g(y)$ con $f(x) = 1 + 2x$ e $g(y) = 1/\cos y$. In particolare, g è definita per $\cos y \neq 0$, ovvero per $y \neq \pi/2 + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Siccome vogliamo che g sia definita su un intervallo, tenuto conto della condizione iniziale dovremo considerare $g : (\pi/2, 3\pi/2) \to \mathbb{R}$. Chiaramente $g \neq 0$.

Separando le variabili otteniamo $y' \cos y = 1 + 2x$, e integrando troviamo la soluzione generale in forma implicita dell'equazione differenziale

$$\sin y = x + x^2 + C,$$

dove $C \in \mathbb{R}$ è una costante che si determina con la condizione iniziale $y(0) = \pi$, ovvero $C = \sin y(0) = 0$.

Ora dobbiamo invertire la relazione $\sin y = x + x^2$. Osserviamo che l'inversione "meccanica"

$$z(x) = \arcsin(x + x^2)$$

non fornisce la soluzione del problema (2.14) perchè $z(0) = \arcsin(0) = 0$ e la condizione iniziale non è verificata.

Per determinare la soluzione corretta osserviamo che la funzione arcsin è l'inversa della funzione sin ristretta all'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$. Nel nostro caso, tuttavia, y prende valori in un intorno di π. Allora procediamo in questo modo. Ponendo $w(x) = y(x) - \pi$, abbiamo $w(0) = y(0) - \pi = 0$ e $\sin w = \sin(y - \pi) = -\sin y = -(x + x^2)$. Siccome w assume valori in un intorno di 0, è ora lecito invertire la funzione seno e otteniamo $w = -\arcsin(x + x^2)$ e quindi

$$y(x) = \pi - \arcsin(x + x^2).$$

Questa è la soluzione del problema, che è definita nell'intervallo aperto

$$I_1 = \big\{x \in \mathbb{R} : x + x^2 < 1\big\}.$$

3. Equazioni differenziali lineari del secondo ordine

Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto e siano $a, b, f \in C(I)$ funzioni continue. In questa sezione studiamo l'equazione differenziale lineare del secondo ordine:

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x), \quad x \in I.$$

L'incognita è una funzione $y \in C^2(I)$. L'equazione differenziale si dice lineare perchè l'operatore differenziale $\mathcal{L} : C^2(I) \to C(I)$

$$\mathcal{L}(y) = y'' + a(x)y' + b(x)y$$

è un operatore lineare.

Il seguente teorema di esistenza e unicità della soluzione per il relativo problema di Cauchy è il corollario di un teorema più generale che sarà visto e provato nel corso di Analisi 3.

Teorema 3.1. Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto, $x_0 \in I$ e $y_0, y_0' \in \mathbb{R}$, e siano $a, b, f \in C(I)$ funzioni continue. Allora il Problema di Cauchy

$$\left\{\begin{array}{l} y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x), \quad x \in I, \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \end{array}\right. \tag{3.15}$$

ha un'unica soluzione $y \in C^2(I)$.

Studiamo ora il caso omogeneo $f = 0$. Consideriamo l'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea

$$S = \big\{y \in C^2(I) : y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \text{ su } I\big\}.$$

Dal teorema precedente segue il seguente fatto.

Proposizione 3.2. L'insieme S delle soluzioni dell'equazione omogenea è uno spazio vettoriale reale di dimensione 2.

Dim. S è uno spazio vettoriale, perchè per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $y_1, y_2 \in S$, ovvero $\mathcal{L}(y_1) = \mathcal{L}(y_2) = 0$, risulta

$$\mathcal{L}(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha \mathcal{L}(y_1) + \beta \mathcal{L}(y_2) = 0,$$

e quindi $\alpha y_1 + \beta y_2 \in S$.

Proviamo che S ha dimensione esattamente 2. Fissato un punto $x_0 \in I$, definiamo la trasformazione $T : S \to \mathbb{R}^2$ definita nel seguente modo

$$T(y) = \big(y(x_0), y'(x_0)\big).$$

La trasformazione T è lineare. Proviamo che T è iniettiva e suriettiva. Ne segue che S ed $\mathbb{R}^2$ sono linearmente isomorfi e dunque $\dim(S) = \dim(\mathbb{R}^2) = 2$.

Prova dell'iniettività: se $T(y) = T(z)$ con $y, z \in S$ allora y e z risolvono lo stesso Problema di Cauchy (3.15) (con $f = 0$). Siccome per il Teorema 3.1 la soluzione del problema è unica, deve essere $y = z$.

Prova della suriettività: dato $(y_0, y_0') \in \mathbb{R}^2$, dal Teorema 3.1 segue l'esistenza di $y \in S$ tale che $T(y) = (y_0, y_0')$.

Dunque, lo spazio vettoriale S ha una base vettoriale composta da due soluzioni. Consideriamo due soluzioni $y_1, y_2 \in S$ (non necessariamente linearmente indipendenti). Formiamo la *matrice Wronskiana*

$$W_{y_1,y_2}(x) = \left(\begin{array}{cc} y_1(x) & y_2(x) \\ y_2'(x) & y_2'(x) \end{array} \right),$$

e il *determinante Wronskiano*

$$w(x) = \det \left(\begin{array}{cc} y_1(x) & y_2(x) \\ y_2'(x) & y_2'(x) \end{array} \right) = y_1(x) y_2'(x) - y_2(x) y_1'(x).$$

Chiaramente risulta $w \in C^1(I)$ e inoltre

$$\begin{aligned} w' &= y_1' y_2' - y_2' y_1' + y_1 y_2'' - y_2 y_1'' \\ &= y_1(-a(x) y_2' - b(x) y_2) - y_2(-a(x) y_1' - b(x) y_1) \\ &= -a(x) w. \end{aligned}$$

Integrando l'equazione differenziale scopriamo che il determinante Wronskiano ha la forma

$$w(x) = w(x_0) \exp\Big(- \int_{x_0}^x a(t) dt \Big), \quad x \in I.$$

In particolare, se $w(x_0) = 0$ in un punto $x_0 \in I$ allora $w = 0$ in tutti i punti.

PROPOSIZIONE 3.3. Siano $y_1, y_2 \in S$ soluzioni dell'equazione omogenea e sia $w = \det W_{y_1,y_2}$ il corrispondente determinante Wronskiano. Allora:

(A) y_1, y_2 sono linearmente dipendenti se e solo se esiste $x_0 \in I$ tale che $w(x_0) = 0$ (equivalentemente se e solo se $w = 0$ su I);

(B) y_1, y_2 sono linearmente indipendenti se e solo se esiste $x_1 \in I$ tale che $w(x_1) \neq 0$ (equivalentemente se e solo so $w \neq 0$ su I).

Dim. Proviamo (A). Se y_1, y_2 sono linearmente dipendenti allora esistono $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tali che $\alpha y_1 + \beta y_2 = 0$ su I. Derivando vale anche $\alpha y_1' + \beta y_2' = 0$ su I, e dunque

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_2' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Segue che $w = 0$ su tutto I.

Supponiamo ora che $w(x_0) = 0$ in un punto $x_0 \in I$. Allora, esistono $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$ tali che

$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_2'(x_0) & y_2'(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La funzione $z = \alpha y_1 + \beta y_2$ è in S e verifica $z(x_0) = 0$ e $z'(x_0) = 0$. Dall'unicità della soluzione per il Problema di Cauchy segue che $z = 0$ e quindi y_1, y_2 sono linermente dipendenti.

L'affermazione (B) segue da (A) per negazione.