

Analisi 2

Roberto Monti

APPUNTI DEL CORSO - VERSIONE DEL 20 APRILE 2011

Indice

Capitolo 1. Teoria dell'integrale di Riemann. Integrali generalizzati	5
1. Integrali impropri su intervallo illimitato	5
2. Convergenza assoluta	7
3. Integrali oscillatori	8
4. Integrali impropri di funzioni non limitate	9
5. Esercizi	10
Capitolo 2. Introduzione alle equazioni differenziali ordinarie	13
1. Equazioni differenziali lineari del primo ordine	13
2. Equazione differenziali a variabili separabili	14
3. Equazioni differenziali lineari del secondo ordine	15
4. Metodo della variazione delle costanti	17
5. Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti	18
6. Esercizi svolti	19
7. Esercizi	22

Teoria dell'integrale di Riemann. Integrali generalizzati

1. Integrali impropri su intervallo illimitato

DEFINIZIONE 1.1. Siano $a \in \mathbb{R}$ ed $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che la restrizione $f: [a, M] \rightarrow \mathbb{R}$ sia (limitata e) Riemann-integrabile per ogni $a \leq M < \infty$. Diciamo che f è *integrabile in senso improprio su $[a, \infty)$* se esiste finito il limite

$$(1.1) \quad I = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_a^M f(x) dx.$$

In questo caso, chiamiamo il numero reale

$$\int_a^\infty f(x) dx = I$$

integrale improprio di f su $[a, \infty)$ ovvero diciamo che l'integrale improprio *converge*. Se il limite non esiste oppure esiste ma infinito diremo che l'integrale improprio di f *diverge*.

L'integrale improprio eredita dall'integrale di Riemann le proprietà di linearità, di monotonia e di decomposizione del dominio.

ESEMPIO 1.2. Studiamo la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro reale $\alpha > 0$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx.$$

Nel caso $\alpha \neq 1$ si ha

$$\int_1^M \frac{1}{x^\alpha} dx = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_{x=1}^{x=M} = \frac{M^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha}$$

e quindi:

a) Se $\alpha > 1$ l'integrale converge

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{M^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} = \frac{1}{\alpha-1};$$

b) Se $0 < \alpha < 1$ l'integrale diverge

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{M^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} = \infty.$$

Nel caso $\alpha = 1$ si ha per ogni $M > 1$

$$\int_1^M \frac{1}{x} dx = \log M,$$

e quindi l'integrale diverge

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \log M = \infty.$$

□

Osserviamo che se $f \geq 0$ è una funzione non negativa su $[0, \infty)$, allora il limite in (1.1) esiste finito oppure infinito. Infatti, la funzione

$$I(M) = \int_a^M f(x) dx$$

è monotona per $M \geq a$ e dunque ha limite per $M \rightarrow \infty$.

TEOREMA 1.3 (Criterio del confronto). Siano $f, g : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, due funzioni Riemann-integrabili su ogni intervallo $[a, M] \subset \mathbb{R}$ con $a \leq M < \infty$. Supponiamo che esista $\bar{x} \geq a$ tale che $0 \leq f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \geq \bar{x}$. Allora:

$$\begin{aligned} \text{a) } \int_a^{\infty} g(x) dx < \infty &\Rightarrow \int_a^{\infty} f(x) dx < \infty; \\ \text{b) } \int_a^{\infty} f(x) dx = \infty &\Rightarrow \int_a^{\infty} g(x) dx = \infty. \end{aligned}$$

Dim. Senza perdere di generalità si può supporre $\bar{x} = a$. Per la monotonia dell'integrale di Riemann, si ha per ogni $M \geq a$:

$$\int_a^M f(x) dx \leq \int_a^M g(x) dx.$$

Le affermazioni a) e b) seguono passando al limite per $M \rightarrow \infty$.

TEOREMA 1.4 (Criterio del confronto asintotico). Siano $f, g : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, due funzioni Riemann-integrabili su ogni intervallo $[a, M]$, $M \geq a$. Supponiamo che risulti $g(x) > 0$ per ogni $x \geq a$ e che esista finito e diverso da zero il limite

$$L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} \neq 0.$$

Allora:

$$\int_a^{\infty} f(x) dx \text{ converge se e solo se } \int_a^{\infty} g(x) dx \text{ converge.}$$

Dim. Supponiamo ad esempio $0 < L < \infty$. Allora, per il Teorema della permanenza del segno esiste $\bar{x} \geq a$ tale che per ogni $x \geq \bar{x}$ si ha

$$\frac{L}{2} \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq 2L.$$

Siccome $g > 0$, si può riordinare la disuguaglianza ottenendo $\frac{L}{2}g(x) \leq f(x) \leq 2Lg(x)$ per ogni $x \geq \bar{x}$. La tesi segue dal Teorema del confronto.

ESEMPIO 1.5. Studiamo la convergenza dell'integrale improprio

$$I_{\alpha} = \int_1^{\infty} \frac{x^{\alpha+1}}{x+1} \log \left(1 + \frac{1}{x} \right) dx$$

al variare del parametro reale $\alpha \in \mathbb{R}$. Ricordiamo lo sviluppo infinitesimale del logaritmo

$$\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

per $x \rightarrow \infty$, dove $o(1/x)$ è un errore che converge a zero più velocemente di $1/x$ quando $x \rightarrow \infty$. Allora la funzione integranda è

$$f(x) = \frac{x^\alpha}{1 + 1/x} \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^{1-\alpha}}(1 + o(1)).$$

Scelta la funzione di confronto $g(x) = \frac{1}{x^{1-\alpha}}$, risulta $g(x) > 0$ per $x > 0$ e inoltre

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \neq 0.$$

Siccome l'integrale

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^{1-\alpha}} dx$$

converge se e solo se $\alpha < 0$, l'integrale in esame pure converge se e solo se $\alpha < 0$. Ad esempio, nel caso $\alpha = -2$ con un conto lasciato come esercizio si può calcolare esplicitamente

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2 + x} \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx = \frac{1}{2} \log^2 2.$$

2. Convergenza assoluta

DEFINIZIONE 2.1. Siano $a \in \mathbb{R}$ ed $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che la restrizione $f: [a, M] \rightarrow \mathbb{R}$ sia (limitata e) Riemann-integrabile per ogni $a \leq M < \infty$. Diciamo che f è *assolutamente integrabile su* $[a, \infty)$ se converge l'integrale improprio

$$\int_a^\infty |f(x)| dx < \infty.$$

In questo caso, diciamo che l'integrale improprio $\int_a^\infty f(x) dx$ converge *assolutamente*.

TEOREMA 2.2. Sia $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione (limitata e) Riemann-integrabile su ogni intervallo della forma $[a, M]$, $M \geq a$. Se f è assolutamente integrabile su $[a, \infty)$ allora è integrabile in senso improprio su $[a, \infty)$ e inoltre

$$(2.2) \quad \left| \int_a^\infty f(x) dx \right| \leq \int_a^\infty |f(x)| dx.$$

Dim. Definiamo le funzioni $f^+, f^-: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \quad \text{e} \quad f^-(x) = \min\{f(x), 0\}, \quad x \geq a.$$

Chiaramente $f(x) = f^+(x) + f^-(x)$ e $|f(x)| = f^+(x) - f^-(x)$ per ogni $x \geq a$. È noto, inoltre, che le funzioni f^+, f^- sono Riemann-integrabili su ogni intervallo $[a, M]$. Per il Teorema del confronto gli integrali impropri

$$\int_a^\infty f^+(x) dx \quad \text{e} \quad \int_a^\infty f^-(x) dx$$

convergono. Passando al limite per $M \rightarrow \infty$ nell'identità

$$\int_a^M f(x)dx = \int_a^M (f^+(x) + f^-(x))dx = \int_a^M f^+(x)dx + \int_a^M f^-(x)dx$$

si ottiene la convergenza dell'integrale improprio di f su $[a, \infty)$. Passando al limite nella disuguaglianza

$$\begin{aligned} \left| \int_a^M f(x)dx \right| &= \left| \int_a^M f^+(x)dx + \int_a^M f^-(x)dx \right| \\ &\leq \int_a^M |f^+(x)|dx + \int_a^M |f^-(x)|dx = \int_a^M |f(x)|dx \end{aligned}$$

si ottiene la (2.2).

ESEMPIO 2.3. L'integrale improprio $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ non converge assolutamente, ovvero

$$\int_0^\infty \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \infty.$$

Infatti, sul generico intervallo $[k\pi + \pi/4, k\pi + 3\pi/4]$, $k = 0, 1, 2, \dots$, risulta

$$|\sin x| \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad \frac{1}{x} \geq \frac{1}{k\pi + 3\pi/4},$$

e dunque

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \geq \frac{\sqrt{2}\pi}{8(k\pi + 3\pi/4)}.$$

Si deduce che

$$\int_0^\infty \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \geq \frac{\sqrt{2}\pi}{8} \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k\pi + 3\pi/4} = \infty.$$

3. Integrali oscillatori

Tipici esempi di integrali oscillatori sono

$$\int_0^\infty f(x) \sin x dx, \quad \int_0^\infty f(x) \cos x dx,$$

ovvero l'integrale a valori complessi

$$\int_0^\infty f(x) e^{ix} dx = \int_0^\infty f(x) \cos x dx + i \int_0^\infty f(x) \sin x dx,$$

dove $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione non negativa, $f \geq 0$.

Il seguente teorema fornisce condizioni sufficienti per la convergenza di integrali di questo tipo.

TEOREMA 3.1 (Criterio per integrali oscillatori). Siano $f \in C([a, \infty))$ e $g \in C^1([a, \infty))$, $a \in \mathbb{R}$, due funzioni con le seguenti proprietà:

- i) $f = F'$ con primitiva $F \in C^1([a, \infty))$ limitata;
- ii) $g' \leq 0$ e $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$.

Allora l'integrale improprio

$$\int_a^\infty f(x)g(x)dx$$

converge.

Dim. Per ogni $M > a$ si ottiene con un'integrazione per parti:

$$\begin{aligned} \int_a^M f(x)g(x)dx &= [F(x)g(x)]_{x=a}^{x=M} - \int_a^M F(x)g'(x)dx \\ &= F(M)g(M) - F(a)g(a) - \int_a^M F(x)g'(x)dx. \end{aligned}$$

Siccome F è limitata e g è infinitesima per $M \rightarrow \infty$, si ha

$$\lim_{M \rightarrow \infty} F(M)g(M) = 0.$$

D'altra parte, siccome $g' \leq 0$ si trova

$$\begin{aligned} \int_a^M |F(x)g'(x)|dx &\leq \sup_{x \in [a, \infty)} |F(x)| \int_a^M |g'(x)|dx = - \sup_{x \in [a, \infty)} |F(x)| \int_a^M g'(x)dx \\ &= (g(a) - g(M)) \sup_{x \in [a, \infty)} |F(x)|, \end{aligned}$$

e dunque, usando nuovamente il fatto che g è infinitesima

$$\int_a^\infty |F(x)g'(x)|dx \leq g(a) \sup_{x \in [a, \infty)} |F(x)| < \infty.$$

Dal momento che la funzione Fg' è assolutamente integrabile su $[a, \infty)$, per il Criterio della convergenza assoluta esiste finito anche il limite

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_a^M F(x)g'(x)dx.$$

Questo termina la prova del teorema.

ESEMPIO 3.2. Usando il Teorema 3.1 sugli integrali oscillatori, si vede che per ogni scelta del parametro $\alpha > 0$ l'integrale improprio

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$$

converge. Infatti, la funzione $f(x) = \sin x$ ha primitiva limitata $F(x) = -\cos x$ e la funzione $g(x) = 1/x^\alpha$ ha derivata negativa per $x > 0$ ed è infinitesima per $x \rightarrow \infty$.

4. Integrali impropri di funzioni non limitate

DEFINIZIONE 4.1. Sia $f: (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $-\infty < a < b < \infty$, una funzione (limitata e) Riemann-integrabile su ogni intervallo della forma $[a + \varepsilon, b]$ con $0 < \varepsilon < b - a$. Diciamo che f è *integrabile in senso improprio su $(a, b]$* se esiste finito il limite

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

In questo caso, diciamo che l'integrale improprio di f su $(a, b]$ converge e poniamo

$$\int_a^b f(x)dx = I.$$

Lo studio degli integrali impropri di funzioni come nella definizione precedente si può ricondurre allo studio di integrali impropri su intervallo illimitato tramite il cambiamento di variabile $y = \frac{b-a}{x-a}$ che porta alla trasformazione formale di integrali

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a) \int_1^\infty f\left(a + \frac{b-a}{y}\right) \frac{dy}{y^2}.$$

ESEMPIO 4.2. Con una discussione analoga a quella svolta nell'Esempio 1.2 si deduce che, al variare del parametro reale $\alpha > 0$, l'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$$

converge se e solo se $\alpha < 1$.

Enunciamo, senza dimostrazione, un Teorema del confronto asintotico per integrali di funzioni non limitate.

TEOREMA 4.3 (Criterio del confronto asintotico). Siano $f, g : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $-\infty < a < b < \infty$, due funzioni (limitate e) Riemann-integrabili su ogni intervallo della forma $[a + \varepsilon, b]$, $0 < \varepsilon < b - a$. Supponiamo che:

- i) $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \infty$;
- ii) il seguente limite esiste finito e diverso da zero

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} \neq 0.$$

Allora:

$$\int_a^b f(x)dx \text{ converge} \Leftrightarrow \int_a^b g(x)dx \text{ converge}.$$

5. Esercizi

ESERCIZIO 1. Al variare del parametro $\alpha \geq 0$, studiare la convergenza e la convergenza assoluta dell'integrale improprio

$$\int_1^\infty \frac{\sin x \log x}{x^\alpha} dx.$$

Questo esercizio è stato risolto in classe. La risposta è la seguente: per $\alpha > 1$ si ha convergenza assoluta (e quindi anche semplice); per $0 < \alpha \leq 1$ non si ha convergenza assoluta ma c'è convergenza semplice; per $\alpha = 0$ non c'è convergenza semplice.

ESERCIZIO 2. Calcolare i seguenti integrali impropri

$$1) \int_0^\infty \frac{\log x}{(x+1)^2} dx; \quad 2) \int_0^\infty x^{-2} e^{-\frac{1}{x}} dx; \quad 3) \int_0^\infty e^{-\beta x} \cos(\alpha x) dx, \quad \beta > 0, \alpha \in \mathbb{R}.$$

ESERCIZIO 3. Stabilire se convergono i seguenti integrali impropri

$$1) \int_0^{\infty} \sin^2 x \, dx; \quad 2) \int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{1 - \sin(x)}} \, dx; \quad 3) \int_0^1 \frac{\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt{1-x^2}} \, dx.$$

ESERCIZIO 4. Stabilire se convergono assolutamente i seguenti integrali impropri

$$1) \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{1+x^2} \, dx; \quad 2) \int_0^{\infty} x^2 e^{-\sqrt{x}} \cos x \, dx; \quad 3) \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x} - \tan \frac{1}{x} \right) \sin x \, dx.$$

ESERCIZIO 5. Calcolare tutti gli $\alpha > 0$ tali che converga ciascuno dei seguenti integrali impropri

$$1) \int_0^1 \frac{(1 - \cos x)^\alpha}{\tan x - x} \, dx; \quad 2) \int_0^1 \frac{\sin(x^\alpha)}{\log(1+x)} \, dx;$$

$$3) \int_0^{\infty} \frac{\arctan \sqrt{x} - \pi/2}{x^\alpha} \, dx; \quad 4) \int_2^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\log^\alpha x} \, dx.$$

ESERCIZIO 6. Studiare la convergenza dei seguenti integrali oscillatori

$$1) \int_2^{\infty} \frac{\sin x}{\log x} \, dx; \quad 2) \int_1^{\infty} \sin x \arcsin \frac{1}{x} \, dx; \quad 3) \int_0^{\infty} x \sin(x^4) \, dx.$$

ESERCIZIO 7. i) Determinare tutti i parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che il seguente integrale improprio converga

$$\int_0^{\infty} \frac{1+x^\beta}{x^\alpha(1+x^2)} \, dx.$$

ii) Rappresentare i parametri ammissibili nel piano cartesiano $\alpha\beta$.

Introduzione alle equazioni differenziali ordinarie

1. Equazioni differenziali lineari del primo ordine

Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto e siano $a, b \in C(I)$ due funzioni continue. Un'equazione differenziale della forma

$$(1.3) \quad y' + a(x)y = b(x), \quad x \in I,$$

si dice equazione lineare del primo ordine. Fissati $x_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}$, possiamo prescrivere il valore della soluzione nel punto x_0 :

$$(1.4) \quad y(x_0) = y_0.$$

Il problema di risolvere l'equazione differenziale (1.3) con la *condizione iniziale* (1.4) si chiama *Problema di Cauchy*. L'incognita del problema è una funzione $y \in C^1(I)$.

Dedurremo la formula risolutiva dell'equazione differenziale, e più in generale del Problema di Cauchy, con un argomento euristico. Consideriamo preliminarmente il caso $b = 0$:

$$(1.5) \quad y' + a(x)y = 0, \quad x \in I.$$

In questo caso, l'equazione differenziale si dice *omogenea*. Supponendo $y \neq 0$, ad esempio $y > 0$, l'equazione differenziale (1.5) si può riscrivere nella forma $y'/y = -a(x)$. Una primitiva della funzione y'/y è $\log y$. Dunque, indicando con A una primitiva di a , ovvero $A'(x) = a(x)$ per ogni $x \in I$, abbiamo

$$-A = \log y + d,$$

per qualche costante $d \in \mathbb{R}$. Segue che $y = \exp(-d - A)$ e ponendo $c = e^{-d}$ troviamo la soluzione

$$(1.6) \quad y(x) = ce^{-A(x)}, \quad x \in I.$$

Questa funzione risolve l'equazione omogenea per ogni $c \in \mathbb{R}$ (in altri termini la limitazione $y > 0$ può essere lasciata cadere).

Ora cerchiamo una soluzione della forma (1.6) per l'equazione non omogenea (1.3), dove ora $c \in C^1(I)$ è una funzione incognita che deve essere determinata. Questo metodo si chiama "variazione della costante". Inserendo $y' = c'e^{-A} - ace^{-A}$ nell'equazione (1.3) otteniamo

$$c'e^{-A} = b, \quad \text{ovvero} \quad c' = be^A.$$

Integrando tale equazione su un intervallo $(x_0, x) \subset I$ otteniamo

$$c(x) = c(x_0) + \int_{x_0}^x b(t)e^{A(t)} dt,$$

e dunque troviamo

$$(1.7) \quad y(x) = \left(c(x_0) + \int_{x_0}^x b(t)e^{A(t)} dt \right) e^{-A(x)}, \quad x \in I,$$

dove $c(x_0) \in \mathbb{R}$ è un numero reale. Per ogni scelta di tale numero, la funzione (1.8) verifica l'equazione differenziale (1.3).

Il numero $c(x_0)$ si può determinare imponendo che l'integrale generale y verifichi la condizione iniziale $y(x_0) = y_0$. Si ottiene $c(x_0) = y_0 e^{A(x_0)}$. Dunque otteniamo la *formula di rappresentazione* per la soluzione del Problema di Cauchy:

$$(1.8) \quad y(x) = \left(y_0 e^{A(x_0)} + \int_{x_0}^x b(t)e^{A(t)} dt \right) e^{-A(x)}, \quad x \in I,$$

Nel prossimo teorema proviamo che il metodo seguito rileva in effetti l'*unica* soluzione del problema di Cauchy.

TEOREMA 1.1. Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto, $x_0 \in I$, $a, b \in C(I)$ e $y_0 \in \mathbb{R}$. Allora la funzione (1.8) risolve in modo unico il Problema di Cauchy (1.3)+(1.4).

Dim. Che la funzione (1.8) risolva il problema è un conto che ripercorre a ritroso l'argomento euristico. Proviamo che questa soluzione è l'unica.

Sia $z \in C^1(I)$ una soluzione dell'equazione differenziale (1.3) e consideriamo la funzione ausiliaria

$$w(x) = e^{A(x)} z(x) - \int_{x_0}^x b(t)e^{A(t)} dt,$$

dove A è una primitiva di a . Dal momento che sull'intervallo I risulta

$$w' = (az + z')e^A - be^A = 0,$$

per il Teorema di Lagrange la funzione w è costante su I , ovvero esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che $w(x) = k \in \mathbb{R}$ per ogni $x \in I$. Dunque, si ha

$$z(x) = \left(k + \int_{x_0}^x b(t)e^{A(t)} dt \right) e^{-A(x)}.$$

D'altra parte, se z risolve anche la condizione iniziale $z(x_0) = y_0$ deve essere $k = y_0 e^{A(x_0)}$ e quindi z coincide con la funzione in (1.8).

2. Equazione differenziali a variabili separabili

Siano $I, J \subset \mathbb{R}$ due intervalli aperti e siano $f \in C(I)$ e $g \in C(J)$ due funzioni continue. Cerchiamo le soluzioni dell'equazione differenziale del primo ordine

$$(2.9) \quad y' = f(x)g(y), \quad x \in I,$$

per qualche intervallo $I_1 \subset I$. Una simile equazione si dice *a variabili separabili*. Eventualmente, fissati un punto $x_0 \in I$ e un valore $y_0 \in J$ possiamo prescrivere la condizione iniziale

$$(2.10) \quad y(x_0) = y_0.$$

Il problema (2.9)+(2.10) si chiama *Problema di Cauchy*.

Osserviamo preliminarmente che se $g(y_0) = 0$ allora la funzione costante $y(x) = y_0$, $x \in I$, è certamente una soluzione dell'equazione differenziale (2.9) che verifica la condizione iniziale.

Siccome vogliamo dividere per g , supponiamo che $g(y_0) \neq 0$. Allora risulta $g \neq 0$ in un intervallo aperto $J_1 \subset J$ che contiene y_0 . Possiamo allora dividere e separare le variabili. L'equazione differenziale si riscrive nel seguente modo:

$$(2.11) \quad \frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x),$$

dove x varia in un intorno $I_1 \subset I$ del punto x_0 tale che $y(x) \in J_1$ per ogni $x \in I_1$.

Sia $G \in C^1(J_1)$ una primitiva di $1/g(y)$ (nella variabile y), definita nell'intervallo J_1 e dove risulta $g \neq 0$. La funzione G è strettamente monotona, perchè $G'(y) \neq 0$, e pertanto G è invertibile.

Sia poi $F \in C^1(I)$ una primitiva di f . Integrando l'equazione differenziale (2.11) si ottiene

$$(2.12) \quad G(y(x)) = F(x) + C, \quad x \in I_1.$$

Qui, $C \in \mathbb{R}$ è una costante che può essere determinata tramite la condizione iniziale, e precisamente $C = G(y_0) - F(x_0)$.

La soluzione del Problema di Cauchy è dunque

$$(2.13) \quad y(x) = G^{-1}(F(x) - F(x_0) + G(y_0)), \quad x \in I_1,$$

dove $G^{-1} : G(J_1) \rightarrow J_1$ è la funzione inversa di G . L'intervallo $I_1 \subset I$ è in generale più piccolo di I .

Il precedente argomento rileva due tipi di soluzione dell'equazione differenziale (2.9): le soluzioni costanti e le soluzioni per cui $g(y) \neq 0$. Potrebbero, tuttavia, esserci altre soluzioni. Se $g \neq 0$ su J , l'argomento prova che la soluzione è necessariamente della forma (2.13).

TEOREMA 2.1. Siano $I, J \subset \mathbb{R}$ due intervalli aperti, $x_0 \in I$ e $y_0 \in J$, e siano $f \in C(I)$, $g \in C(J)$ tali che $g \neq 0$ su J . Allora il Problema di Cauchy (2.9)+(2.10) ha una soluzione unica $y \in C^1(I_1)$ data dalla formula (2.13), per qualche intervallo aperto $I_1 \subset I$ contenente x_0 .

La dimostrazione del teorema è contenuta nell'argomento precedente.

3. Equazioni differenziali lineari del secondo ordine

Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto e siano $a, b, f \in C(I)$ funzioni continue. In questa sezione studiamo l'equazione differenziale lineare del secondo ordine:

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x), \quad x \in I.$$

L'incognita è una funzione $y \in C^2(I)$. L'equazione differenziale si dice lineare perchè l'operatore differenziale $\mathcal{L} : C^2(I) \rightarrow C(I)$

$$\mathcal{L}(y) = y'' + a(x)y' + b(x)y$$

è un operatore lineare.

Il seguente teorema di esistenza e unicità della soluzione per il relativo problema di Cauchy è il corollario di un teorema più generale che sarà visto e provato nel corso di Analisi 3.

TEOREMA 3.1. Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto, $x_0 \in I$ e $y_0, y'_0 \in \mathbb{R}$, e siano $a, b, f \in C(I)$ funzioni continue. Allora il Problema di Cauchy

$$(3.14) \quad \begin{cases} y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x), & x \in I, \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases}$$

ha un'unica soluzione $y \in C^2(I)$.

Studiamo ora il caso omogeneo $f = 0$. Consideriamo l'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea

$$S = \{y \in C^2(I) : y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \text{ su } I\}.$$

Dal teorema precedente segue il seguente fatto.

PROPOSIZIONE 3.2. L'insieme S delle soluzioni dell'equazione omogenea è uno spazio vettoriale reale di dimensione 2.

Dim. S è uno spazio vettoriale, perchè per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $y_1, y_2 \in S$, ovvero $\mathcal{L}(y_1) = \mathcal{L}(y_2) = 0$, risulta

$$\mathcal{L}(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha \mathcal{L}(y_1) + \beta \mathcal{L}(y_2) = 0,$$

e quindi $\alpha y_1 + \beta y_2 \in S$.

Proviamo che S ha dimensione esattamente 2. Fissato un punto $x_0 \in I$, definiamo la trasformazione $T : S \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita nel seguente modo

$$T(y) = (y(x_0), y'(x_0)).$$

La trasformazione T è lineare. Proviamo che T è iniettiva e suriettiva. Ne segue che S ed \mathbb{R}^2 sono linearmente isomorfi e dunque $\dim(S) = \dim(\mathbb{R}^2) = 2$.

Prova dell'iniettività: se $T(y) = T(z)$ con $y, z \in S$ allora y e z risolvono lo stesso Problema di Cauchy (3.14) (con $f = 0$). Siccome per il Teorema 3.1 la soluzione del problema è unica, deve essere $y = z$.

Prova della suriettività: dato $(y_0, y'_0) \in \mathbb{R}^2$, dal Teorema 3.1 segue l'esistenza di $y \in S$ tale che $T(y) = (y_0, y'_0)$.

Dunque, lo spazio vettoriale S ha una base vettoriale composta da due soluzioni. Consideriamo due soluzioni $y_1, y_2 \in S$ (non necessariamente linearmente indipendenti). Formiamo la *matrice Wronskiana*

$$W_{y_1, y_2}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix},$$

e il *determinante Wronskiano*

$$w(x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x).$$

Chiaramente risulta $w \in C^1(I)$ e inoltre

$$\begin{aligned} w' &= y_1'y_2' - y_2'y_1' + y_1y_2'' - y_2y_1'' \\ &= y_1(-a(x)y_2' - b(x)y_2) - y_2(-a(x)y_1' - b(x)y_1) \\ &= -a(x)w. \end{aligned}$$

Integrando l'equazione differenziale scopriamo che il determinante Wronskiano ha la forma

$$w(x) = w(x_0) \exp\left(-\int_{x_0}^x a(t)dt\right), \quad x \in I.$$

In particolare, se $w(x_0) = 0$ in un punto $x_0 \in I$ allora $w = 0$ in tutti i punti.

PROPOSIZIONE 3.3. Siano $y_1, y_2 \in S$ soluzioni dell'equazione omogenea e sia $w = \det W_{y_1, y_2}$ il corrispondente determinante Wronskiano. Allora:

- (A) y_1, y_2 sono linearmente dipendenti se e solo se esiste $x_0 \in I$ tale che $w(x_0) = 0$ (equivalentemente se e solo se $w = 0$ su I);
- (B) y_1, y_2 sono linearmente indipendenti se e solo se esiste $x_1 \in I$ tale che $w(x_1) \neq 0$ (equivalentemente se e solo se $w \neq 0$ su I).

Dim. Proviamo (A). Se y_1, y_2 sono linearmente dipendenti allora esistono $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tali che $\alpha y_1 + \beta y_2 = 0$ su I . Derivando vale anche $\alpha y_1' + \beta y_2' = 0$ su I , e dunque

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Segue che $w = 0$ su tutto I .

Supponiamo ora che $w(x_0) = 0$ in un punto $x_0 \in I$. Allora, esistono $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ tali che

$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La funzione $z = \alpha y_1 + \beta y_2$ è in S e verifica $z(x_0) = 0$ e $z'(x_0) = 0$. Dall'unicità della soluzione per il Problema di Cauchy segue che $z = 0$ e quindi y_1, y_2 sono linearmente dipendenti.

L'affermazione (B) segue da (A) per negazione.

4. Metodo della variazione delle costanti

In questa sezione illustriamo il metodo per calcolare una soluzione dell'equazione non omogenea

$$(4.15) \quad y'' + a(x)y + b(x)y = f(x), \quad x \in I,$$

una volta si sappia risolvere l'equazione omogenea corrispondente. Sia y_1, y_2 una base di soluzioni per l'equazione omogenea $y'' + a(x)y + b(x)y = 0$. Cerchiamo una soluzione del tipo

$$(4.16) \quad y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

dove $c_1, c_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni da determinare. Derivando la relazione si ottiene

$$y' = c_1' y_1 + c_1 y_1' + c_2' y_2 + c_2 y_2'.$$

Imponendo la condizione

$$(4.17) \quad c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0$$

l'espressione precedente si riduce alla seguente

$$y' = c_1 y_1' + c_2 y_2'.$$

Derivando nuovamente si ottiene

$$y'' = c'_1 y'_1 + c_1 y''_1 + c'_2 y'_2 + c_2 y''_2.$$

Sostituendo nell'equazione differenziale di partenza, dopo qualche calcolo, si arriva alla seguente equazione

$$c_1(y''_1 + ay'_1 + by_1) + c_2(y''_2 + ay'_2 + by_2) + c'_1 y'_1 + c'_2 y'_2 = f.$$

Usando il fatto che y_1, y_2 risolvono l'equazione omogenea si ottiene la seconda condizione

$$(4.18) \quad c'_1 y'_1 + c'_2 y'_2 = f.$$

Mettendo a sistema le condizioni (4.17) e (4.18) si arriva al sistema

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c'_1 \\ c'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}.$$

Nel sistema è apparsa la matrice Wronskiana di y_1, y_2 . Per la Proposizione 3.3, questa matrice è invertibile in ogni punto $x \in I$. Questo permette di risolvere il sistema in c'_1 e c'_2 :

$$\begin{pmatrix} c'_1 \\ c'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}.$$

Le due equazioni del sistema possono essere integrate. Questo procedimento determina c_1 e c_2 a meno di due costanti additive che appaiono nel processo di integrazione. Una volta sostituite c_1 e c_2 nella (4.16), le due costanti possono essere determinate con delle eventuali condizioni iniziali.

5. Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti

Consideriamo un'equazione differenziale del tipo

$$(5.19) \quad y'' + ay' + by = 0$$

dove ora $a, b \in \mathbb{R}$ sono costanti. Si cercano soluzioni della forma $y(x) = e^{\lambda x}$, dove $\lambda \in \mathbb{C}$ è un parametro complesso. Sostituendo le derivate $y' = \lambda e^{\lambda x}$ e $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$ nell'equazione differenziale si ottiene l'equazione

$$e^{\lambda x}(\lambda^2 + a\lambda + b) = 0.$$

Siccome $e^{\lambda x} \neq 0$, tale equazione è verificata se e solo se λ verifica l'*equazione caratteristica*:

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0.$$

Sia $\Delta = a^2 - 4b$ il discriminante dell'equazione. Si possono presentare tre casi.

1) $\Delta > 0$. L'equazione caratteristica ha due soluzioni reali distinte

$$\lambda_1 = \frac{-a - \sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{-a + \sqrt{\Delta}}{2}.$$

In questo caso, la soluzione generale y di (5.19) è una combinazione lineare delle soluzioni $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ e $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$, che sono linearmente indipendenti:

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

dove $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

2) $\Delta < 0$. L'equazione caratteristica ha due soluzioni complesse coniugate

$$\lambda_1 = \frac{-a + i\sqrt{-\Delta}}{2} = \alpha + i\beta \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{-a - i\sqrt{-\Delta}}{2} = \alpha - i\beta$$

dove si è posto $\alpha = -a/2$ e $\beta = \sqrt{-\Delta}/2$. Le funzioni

$$z_1(x) = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x)$$

$$z_2(x) = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{-i\beta x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x)$$

sono soluzioni a valori complessi dell'equazione differenziale. Dunque, le funzioni

$$y_1(x) = \frac{z_1(x) + z_2(x)}{2} = e^{\alpha x} \cos \beta x$$

$$y_2(x) = \frac{z_1(x) - z_2(x)}{2i} = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

sono soluzioni a valori reali dell'equazione differenziale. Le funzioni y_1 e y_2 sono linearmente indipendenti e dunque la soluzione generale dell'equazione differenziale è della forma

$$y(x) = (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x) e^{\alpha x}$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

3) $\Delta = 0$. L'equazione caratteristica ha la soluzione reale $\lambda = -a/2$ con molteplicità 2. In questo caso, il metodo produce una sola soluzione $y_1(x) = e^{\lambda x}$. Un conto diretto mostra che la funzione $y_2(x) = x e^{\lambda x}$ è pure una soluzione che è linearmente indipendente dalla precedente. In effetti, si ha:

$$\begin{aligned} y_2'' + a y_2' + b y_2 &= 2\lambda e^{\lambda x} + \lambda^2 x e^{\lambda x} + a(e^{\lambda x} + \lambda x e^{\lambda x}) + b x e^{\lambda x} \\ &= (\lambda^2 + a\lambda + b)x e^{\lambda x} + (2\lambda + a)e^{\lambda x} = 0, \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio si è usato il fatto che λ risolve l'equazione caratteristica e che $\lambda = -a/2$.

La soluzione generale dell'equazione (5.19) è dunque

$$y(x) = (c_1 + c_2 x) e^{\lambda x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

6. Esercizi svolti

ESERCIZIO 8. Cerchiamo la soluzione del Problema di Cauchy seguente

$$(6.20) \quad \begin{cases} y' = \frac{1+2x}{\cos y} \\ y(0) = \pi. \end{cases}$$

L'equazione differenziale è a variabili separabili $y' = f(x)g(y)$ con $f(x) = 1 + 2x$ e $g(y) = 1/\cos y$. In particolare, g è definita per $\cos y \neq 0$, ovvero per $y \neq \pi/2 + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Siccome vogliamo che g sia definita su un intervallo, tenuto conto della condizione iniziale dovremo considerare $g : (\pi/2, 3\pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$. Chiaramente $g \neq 0$.

Separando le variabili otteniamo $y' \cos y = 1 + 2x$, e integrando troviamo la soluzione generale in forma implicita dell'equazione differenziale

$$\sin y = x + x^2 + C,$$

dove $C \in \mathbb{R}$ è una costante che si determina con la condizione iniziale $y(0) = \pi$, ovvero $C = \sin y(0) = 0$.

Ora dobbiamo invertire la relazione $\sin y = x + x^2$. Osserviamo che l'inversione "meccanica"

$$z(x) = \arcsin(x + x^2)$$

non fornisce la soluzione del problema (6.20) perchè $z(0) = \arcsin(0) = 0$ e la condizione iniziale non è verificata.

Per determinare la soluzione corretta osserviamo che la funzione \arcsin è l'inversa della funzione \sin ristretta all'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$. Nel nostro caso, tuttavia, y prende valori in un intorno di π . Allora procediamo in questo modo. Ponendo $w(x) = y(x) - \pi$, abbiamo $w(0) = y(0) - \pi = 0$ e $\sin w = \sin(y - \pi) = -\sin y = -(x + x^2)$. Siccome w assume valori in un intorno di 0, è ora lecito invertire la funzione seno e otteniamo $w = -\arcsin(x + x^2)$ e quindi

$$y(x) = \pi - \arcsin(x + x^2).$$

Questa è la soluzione del problema, che è definita nell'intervallo aperto

$$I_1 = \{x \in \mathbb{R} : x + x^2 < 1\}.$$

ESERCIZIO 9. Calcolare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' - y = \frac{e^x}{e^x + 1}.$$

L'equazione caratteristica è $\lambda^2 - 1 = 0$ le cui soluzioni sono $\lambda = \pm 1$. La soluzione generale dell'equazione omogenea è quindi $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$. Calcoliamo la soluzione generale dell'equazione non omogenea con il metodo della variazione delle costanti. Cerchiamo una soluzione della forma

$$y = c_1(x)e^x + c_2(x)e^{-x},$$

con c_1, c_2 funzioni da determinare. Derivando si ottiene $y' = c_1' e^x + c_1 e^x + c_2' e^{-x} - c_2 e^{-x}$ e imponendo la prima condizione

$$c_1' e^x + c_2' e^{-x} = 0$$

si ha $y' = c_1 e^x - c_2 e^{-x}$ e quindi $y'' = c_1' e^x + c_1 e^x - c_2' e^{-x} + c_2 e^{-x}$. Sostituendo nell'equazione di partenza si trova

$$e^x(c_1 + c_1') + e^{-x}(c_2 - c_2') - c_1 e^x - c_2 e^{-x} = \frac{e^x}{1 + e^x},$$

e quindi si ottiene la seconda condizione

$$e^x c_1' - c_2' e^{-x} = \frac{e^x}{1 + e^x}.$$

Risolviamo il sistema delle due condizioni

$$\begin{cases} c_1' e^x + c_2' e^{-x} = 0 \\ c_1' e^x - c_2' e^{-x} = \frac{e^x}{1 + e^x}. \end{cases}$$

Sommando e sottraendo le due equazioni si ottiene

$$\begin{cases} c_1' = \frac{1}{2} \frac{1}{1+e^x} \\ c_2' = -\frac{1}{2} \frac{e^{2x}}{1+e^x}. \end{cases}$$

Per determinare c_1 calcoliamo l'integrale indefinito

$$c_1(x) = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1+e^x}$$

mediante la sostituzione $t = e^x$. Si ottiene

$$c_1(x) = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t(1+t)} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \frac{1}{2} \log \frac{e^x}{1+e^x} + k_1,$$

dove $k_1 \in \mathbb{R}$ è una costante additiva. Per determinare $c_2(x)$ calcoliamo l'integrale

$$c_2(x) = \frac{1}{2} \int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx$$

con la stessa sostituzione. Si ottiene

$$c_2(x) = -\frac{1}{2} e^x + \frac{1}{2} \log(1+e^x) + k_2,$$

con $k_2 \in \mathbb{R}$. In conclusione, si ottiene la soluzione generale

$$y(x) = \left(\frac{1}{2} \log \frac{e^x}{1+e^x} + k_1 \right) e^x + \left(-\frac{1}{2} e^x + \frac{1}{2} \log(1+e^x) + k_2 \right) e^{-x},$$

dove $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ sono due costanti libere.

ESERCIZIO 10. Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ studiare esistenza e unicità della soluzione $y \in C^1(\mathbb{R})$ del problema

$$\begin{cases} x^3 y' - y + 1 = 0, \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

L'equazione differenziale è lineare del primo ordine. Tuttavia il coefficiente di y' si annulla nel punto $x = 0$, proprio dove è assegnato il dato iniziale.

Calcoliamo tutte le soluzioni dell'equazione dove $x \neq 0$. L'equazione omogenea $x^3 y' = y$ ha le soluzioni

$$y(x) = ce^{-\frac{1}{2x^2}}.$$

Cerchiamo una soluzione dell'equazione non omogenea della stessa forma, con $c = c(x)$ funzione da determinare. Derivando y e sostituendo nell'equazione si arriva all'identità

$$c'(x) = -\frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{2x^2}}.$$

Ora integriamo questa identità un un intervallo (x_0, x) . La funzione che appare a destra non è integrabile in $x = 0$. Quindi l'intervallo di integrazione deve verificare $x, x_0 > 0$ oppure $x, x_0 < 0$. Integrando si ottiene

$$c(x) = c(x_0) - \int_{x_0}^x \frac{1}{t^3} e^{\frac{1}{2t^2}} dt = k_1 + e^{\frac{1}{2x^2}},$$

dove $k_1 \in \mathbb{R}$ è una costante. Siccome bisogna distinguere l'integrazione nel caso $x > 0$ e in quello $x < 0$, l'espressione generale per la funzione c è la seguente:

$$c(x) = \begin{cases} k_1 + e^{\frac{1}{2x^2}}, & x > 0, \\ k_2 + e^{\frac{1}{2x^2}}, & x < 0, \end{cases}$$

dove $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ sono due costanti indipendenti. Dunque, la soluzione generale dell'equazione differenziale è la seguente:

$$y(x) = \begin{cases} 1 + k_1 e^{-\frac{1}{2x^2}}, & x > 0, \\ 1 + k_2 e^{-\frac{1}{2x^2}}, & x < 0. \end{cases}$$

Dal momento che

$$\lim_{x \rightarrow 0} y(x) = 1$$

indipendentemente da k_1, k_2 , tutte le funzioni y si prolungano con continuità in $x = 0$ ponendo $y(0) = 1$. La funzione che ne risulta verifica in effetti $y \in C^1(\mathbb{R})$ con $y'(0) = 0$. La verifica di questo fatto è lasciata come esercizio.

Arriviamo alle seguenti conclusioni:

- 1) Per $\alpha \neq 1$ il problema non ha soluzioni.
- 2) Per $\alpha = 1$ il problema ha infinite soluzioni, che dipendono da due parametri reali.

7. Esercizi

ESERCIZIO 11. Calcolare la soluzione generale delle seguenti equazioni differenziali:

$$\text{i) } y' = \frac{y \cos x}{1 + \sin x} + \sin x; \quad \text{ii) } y' = \frac{3}{x}y + x^2 + 1, \quad x > 0.$$

ESERCIZIO 12. Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = (y^2 - y) \log(2 + x).$$

- i) Determinare il suo integrale generale.
- ii) Risolvere il problema di Cauchy con dato $y(-1) = 1/2$.

Soluzione:

$$y(x) = \frac{e^{x+1}}{e^{x+1} + (x+2)^{x+2}}, \quad x+2 > 0.$$

ESERCIZIO 13. Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = (y-1)(y-4) \frac{\cos x}{\sin x}.$$

- i) Trovare tutte le soluzioni costanti.
- ii) Calcolare la soluzione generale dell'equazione in forma implicita.
- iii) Calcolare in forma esplicita la soluzione del problema di Cauchy con dato iniziale $y(3\pi/2) = 5$.

ESERCIZIO 14. Calcolare la soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y = \frac{1}{\cos x}, & x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Soluzione: $y = \cos x \log(\cos x) + x \sin x$.

ESERCIZIO 15 (Difficile). Calcolare la soluzione $y \in C^1(a, b)$, $-\infty \leq a < 1 < b \leq \infty$, del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{y-x}{y+x}, \\ y(1) = 0, \end{cases}$$

e disegnare un grafico qualitativo di y . Calcolare b e mostrare che $a > -\frac{1}{2}e^{-\pi/2}$.