Analisi 2

Roberto Monti

Appunti del Corso - Versione del 10 Maggio 2011

Indice

CAPITOLO 1

Teoria dell'integrale di Riemann. Integrali generalizzati

1. Integrali impropri su intervallo illimitato

DEFINIZIONE 1.1. Siano $a \in \mathbb{R}$ ed $f\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione tale che la restrizione $f : [a, M] \to \mathbb{R}$ sia (limitata e) Riemann-integrabile per ogni $a \le M < \infty$. Diciamo che f è *integrabile in senso improprio su* $[a,\infty)$ se esiste finito il limite

$$I = \lim_{M\to\infty} \int_a^M f(x)dx. \tag{1.1}$$

In questo caso, chiamiamo il numero reale

$$\int_a^\infty f(x)dx = I$$

integrale improprio di f su $[a,\infty)$ ovvero diciamo che l'integrale improprio *converge* Se il limite non esiste oppure esiste ma infinito diremo che l'integrale improprio di f *diverge.*

L'integrale improprio eredità dall'integrale di Riemann le proprietà di linearità, di monotonia e di decomposizione del dominio.

ESEMPIO 1.2. Studiamo la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro reale $\alpha > 0$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx.$$

Nel caso $\alpha \neq 1$ si ha

$$\int_1^M \frac{1}{x^\alpha} dx = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_{x=1}^{x=M} = \frac{M^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}$$

e quindi:

a) Se $\alpha > 1$ l'integrale converge

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{M\to\infty} \frac{M^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} = \frac{1}{\alpha-1};$$

b) Se $0 < \alpha < 1$ l'integrale diverge

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{M\to\infty} \frac{M^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} = \infty.$$

Nel caso $\alpha = 1$ si ha per ogni $M > 1$

$$\int_1^M \frac{1}{x} dx = \log M,$$

e quindi l'integrale diverge

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}dx = \lim_{M\to\infty} \log M = \infty.$$

□

Osserviamo che se $f \geq 0$ è una funzione non negativa su $[0,\infty)$, allora il limite in (1.1) esiste finito oppure infinito. Infatti, la funzione

$$I(M) = \int_a^M f(x)dx$$

è monotona per $M \geq a$ e dunque ha limite per $M \to \infty$.

Teorema 1.3 (Criterio del confronto). Siano $f, g : [a,\infty) \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, due funzioni Riemann-integrabili su ogni intervallo $[a, M] \subset \mathbb{R}$ con $a \leq M < \infty$. Supponiamo che esista $\bar{x} \geq a$ tale che $0 \leq f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \geq \bar{x}$. Allora:

a) $\displaystyle\int_a^\infty g(x)dx < \infty \quad \Rightarrow \quad \int_a^\infty f(x)dx < \infty;$

b) $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx = \infty \quad \Rightarrow \quad \int_a^\infty g(x)dx = \infty.$

Dim. Senza perdere di generalità si può supporre $\bar{x} = a$. Per la monotonia dell'integrale di Riemann, si ha per ogni $M \geq a$:

$$\int_a^M f(x)dx \leq \int_a^M g(x)dx.$$

Le affermazioni a) e b) seguono passando al limite per $M \to \infty$.

Teorema 1.4 (Criterio del confronto asintotico). Siano $f, g : [a,\infty) \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, due funzioni Riemann–integrabili su ogni intervallo $[a, M]$, $M \geq a$. Supponiamo che risulti $g(x) > 0$ per ogni $x \geq a$ e che esista finito e diverso da zero il limite

$$L = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \neq 0.$$

Allora:

$$\int_a^\infty f(x)dx \quad \text{converge} \quad \text{se e solo se} \quad \int_a^\infty g(x)dx \quad \text{converge.}$$

Dim. Supponiamo ad esempio $0 < L < \infty$. Allora, per il Teorema della permanenza del segno esiste $\bar{x} \geq a$ tale che per ogni $x \geq \bar{x}$ si ha

$$\frac{L}{2} \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq 2L.$$

Siccome $g > 0$, si può riordinare la disuguaglianza ottenendo $\frac{L}{2}g(x) \leq f(x) \leq 2Lg(x)$ per ogni $x \geq \bar{x}$. La tesi segue dal Teorema del confronto.

Esempio 1.5. Studiamo la convergenza dell'integrale improprio

$$I_\alpha = \int_1^\infty \frac{x^{\alpha+1}}{x+1} \log\Big(1 + \frac{1}{x}\Big)dx$$

al variare del parametro reale $\alpha \in \mathbb{R}$. Ricordiamo lo sviluppo infinitesimale del logaritmo

$$\log\Big(1+\frac{1}{x}\Big) = \frac{1}{x} + o\Big(\frac{1}{x}\Big)$$

per $x \to \infty$, dove $o(1/x)$ è un errore che converge a zero più velocemente di $1/x$ quando $x \to \infty$. Allora la funzione integranda è

$$f(x) = \frac{x^\alpha}{1+1/x}\log\Big(1+\frac{1}{x}\Big) = \frac{1}{x^{1-\alpha}}(1+o(1)).$$

Scelta la funzione di confronto $g(x) = \frac{1}{x^{1-\alpha}}$, risulta $g(x) > 0$ per $x > 0$ e inoltre

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \neq 0.$$

Siccome l'integrale

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^{1-\alpha}} dx$$

converge se e solo se $\alpha < 0$, l'integrale in esame pure converge se e solo se $\alpha < 0$. Ad esempio, nel caso $\alpha = -2$ con un conto lasciato come esercizio si può calcolare esplicitamente

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2+x}\log\Big(1+\frac{1}{x}\Big)dx = \frac{1}{2}\log^2 2.$$

2. Convergenza assoluta

Definizione 2.1. Siano $a \in \mathbb{R}$ ed $f\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione tale che la restrizione $f : [a, M] \to \mathbb{R}$ sia (limitata e) Riemann–integrabile per ogni $a \leq M < \infty$. Diciamo che f è *assolutamente integrabile su* $[a,\infty)$ se converge l'integrale improprio

$$\int_a^\infty |f(x)|dx < \infty.$$

In questo caso, diciamo che l'integrale improprio $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ *converge assolutamente.*

Teorema 2.2. Sia $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione (limitata e) Riemann–integrabile su ogni intervallo della forma $[a, M]$, $M \geq a$. Se f è assolutamente integrabile su $[a,\infty)$ allora è integrabile in senso improprio su $[a,\infty)$ e inoltre

$$\Big|\int_a^\infty f(x)dx\Big| \leq \int_a^\infty |f(x)|dx. \tag{2.2}$$

Dim. Definiamo le funzioni $f^+, f^- : [a,\infty) \to \mathbb{R}$

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \quad \text{e} \quad f^-(x) = \min\{f(x), 0\}, \quad x \geq a.$$

Chiaramente $f(x) = f^+(x) + f^-(x)$ e $|f(x)| = f^+(x) - f^-(x)$ per ogni $x \geq a$. È noto, inoltre, che le funzioni f^+, f^- sono Riemann–integrabili su ogni intervallo $[a, M]$. Per il Teorema del confronto gli integrali impropri

$$\int_a^\infty f^+(x)dx \quad \text{e} \quad \int_a^\infty f^-(x)dx$$

convergono. Passando al limite per $M \to \infty$ nell'identità

$$\int_a^M f(x)dx = \int_a^M \big(f^+(x) + f^-(x)\big)dx = \int_a^M f^+(x)dx + \int_a^M f^-(x)dx$$

si ottiene la convergenza dell'integrale improprio di f su $[a, \infty)$. Passando al limite nella disuguaglianza

$$\begin{aligned} \Big|\int_a^M f(x)dx\Big| &= \Big|\int_a^M f^+(x)dx + \int_a^M f^-(x)dx\Big| \\ &\le \int_a^M |f^+(x)|dx + \int_a^M |f^-(x)|dx = \int_a^M |f(x)|dx \end{aligned}$$

si ottiene la (2.2).

Esempio 2.3. L'integrale improprio $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ non converge assolutamente, ovvero

$$\int_0^\infty \Big|\frac{\sin x}{x}\Big|dx = \infty.$$

Infatti, sul generico intervallo $[k\pi + \pi/4, k\pi + 3\pi/4]$, $k = 0, 1, 2, ...$, risulta

$$|\sin x| \ge \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad \frac{1}{x} \ge \frac{1}{k\pi + 3\pi/4},$$

e dunque

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \Big|\frac{\sin x}{x}\Big|dx \ge \frac{\sqrt{2}\pi}{8(k\pi + 3\pi/4)}.$$

Si deduce che

$$\int_0^\infty \Big|\frac{\sin x}{x}\Big|dx \ge \frac{\sqrt{2}\pi}{8}\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k\pi + 3\pi/4} = \infty.$$

3. Integrali oscillatori

Tipici esempi di integrali oscillatori sono

$$\int_0^\infty f(x)\sin x dx, \quad \int_0^\infty f(x)\cos x dx,$$

ovvero l'integrale a valori complessi

$$\int_0^\infty f(x)e^{ix}dx = \int_0^\infty f(x)\cos x dx + i\int_0^\infty f(x)\sin x dx,$$

dove $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ è una funzione non negativa, $f \ge 0$.

Il seguente teorema fornisce condizioni sufficiente per la convergenza di integrali di questo tipo.

Teorema 3.1 (Criterio per integrali oscillatori). Siano $f \in C([a, \infty))$ e $g \in C^1([a, \infty))$, $a \in \mathbb{R}$, due funzioni con le seguenti proprietà:

i) $f = F'$ con primitiva $F \in C^1([a, \infty))$ limitata;
ii) $g' \le 0$ e $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$.

Allora l'integrale improprio

$$\int_a^\infty f(x)g(x)dx$$

converge.

Dim. Per ogni $M > a$ si ottiene con un'integrazione per parti:

$$\begin{aligned}\int_a^M f(x)g(x)dx &= \Big[F(x)g(x)\Big]_{x=a}^{x=M} - \int_a^M F(x)g'(x)dx \\ &= F(M)g(M) - F(a)g(a) - \int_a^M F(x)g'(x)dx.\end{aligned}$$

Siccome F è limitata e g è infinitesima per $M \to \infty$, si ha

$$\lim_{M\to\infty} F(M)g(M) = 0.$$

D'altra parte, siccome $g' \le 0$ si trova

$$\begin{aligned}\int_a^M |F(x)g'(x)|dx \le \sup_{x\in[a,\infty)} |F(x)| \int_a^M |g'(x)|dx &= -\sup_{x\in[a,\infty)} |F(x)| \int_a^M g'(x)dx \\ &= \big(g(a) - g(M)\big) \sup_{x\in[a,\infty)} |F(x)|,\end{aligned}$$

e dunque, usando nuovamente il fatto che g è infinitesima

$$\int_a^\infty |F(x)g'(x)|dx \le g(a) \sup_{x\in[a,\infty)} |F(x)| < \infty.$$

Dal momento che la funzione Fg' è assolutamente integrabile su $[a,\infty)$, per il Criterio della convergenza assoluta esiste finito anche il limite

$$\lim_{M\to\infty} \int_a^M F(x)g'(x)dx.$$

Questo termina la prova del teorema.

Esempio 3.2. Usando il Teorema 3.1 sugli integrali oscillatori, si vede che per ogni scelta del parametro $\alpha > 0$ l'integrale improprio

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$$

converge. Infatti, la funzione $f(x) = \sin x$ ha primitiva limitata $F(x) = -\cos x$ e la funzione $g(x) = 1/x^\alpha$ ha derivata negativa per $x > 0$ ed è infinitesima per $x \to \infty$.

4. Integrali impropri di funzioni non limitate

Definizione 4.1. Sia $f\colon (a,b] \to \mathbb{R}$, $-\infty < a < b < \infty$, una funzione (limitata e) Riemann–integrabile su ogni intervallo della forma $[a+\varepsilon, b]$ con $0 < \varepsilon < b-a$. Diciamo che f è *integrabile in senso improprio su* $(a,b]$ se esiste finito il limite

$$I = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

In questo caso, diciamo che l'integrale improprio di f su $(a, b]$ *converge* e poniamo

$$\int_a^b f(x)dx = I.$$

Lo studio degli integrali impropri di funzioni come nella definizione precedente si può ricondurre allo studio di integrali impropri su intervallo illimitato tramite il cambiamento di variabile $y = \frac{b-a}{x-a}$ che porta alla trasformazione formale di integrali

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\int_1^\infty f\Big(a + \frac{b-a}{y}\Big)\frac{dy}{y^2}.$$

Esempio 4.2. Con una discussione analoga a quella svolta nell'Esempio 1.2 si deduce che, al variare del parametro reale $\alpha > 0$, l'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx$$

converge se e solo se $\alpha < 1$.

Enunciamo, senza dimostrazione, un Teorema del confronto asintotico per integrali di funzioni non limitate.

Teorema 4.3 (Criterio del confronto asintotico). Siano $f, g : (a, b] \to \mathbb{R}$, $-\infty < a < b < \infty$, due funzioni (limitate e) Riemann-integrabili su ogni intervallo della forma $[a + \varepsilon, b]$, $0 < \varepsilon < b - a$. Supponiamo che:

i) $\lim\limits_{x\to a^+} g(x) = \infty$;

ii) il seguente limite esiste finito e diverso da zero

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} \neq 0.$$

Allora:

$$\int_a^b f(x)dx \quad \text{converge} \quad \Leftrightarrow \quad \int_a^b g(x)dx \quad \text{converge.}$$

5. Esercizi

Esercizio 1. Al variare del parametro $\alpha \geq 0$, studiare la convergenza e la convergenza assoluta dell'integrale improprio

$$\int_1^\infty \frac{\sin x \log x}{x^\alpha}dx.$$

Questo esercizio è stato risolto in classe. La risposta è la seguente: per $\alpha > 1$ si ha convergenza assoluta (e quindi anche semplice); per $0 < \alpha \leq 1$ non si ha convergenza assoluta ma c'è convergenza semplice; per $\alpha = 0$ non c'è convergenza semplice.

Esercizio 2. Calcolare i seguenti integrali impropri

$$1)\ \int_0^\infty \frac{\log x}{(x+1)^2}dx; \quad 2)\ \int_0^\infty x^{-2}e^{-\frac{1}{x}}\,dx; \quad 3)\ \int_0^\infty e^{-\beta x}\cos(\alpha x)\,dx, \quad \beta > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 3. Stabilire se convergono i seguenti integrali impropri

$$1)\ \int_0^\infty \sin^2 x\,dx;\quad 2)\ \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{1-\sin(x)}}\,dx;\quad 3)\ \int_0^1 \frac{\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Esercizio 4. Stabilire se convergono assolutamente i seguenti integrali impropri

$$1)\ \int_0^\infty \frac{\sin x}{1+x^2}dx;\quad 2)\ \int_0^\infty x^2 e^{-\sqrt{x}}\cos x\,dx;\quad 3)\ \int_1^\infty \Big(\frac{1}{x}-\tan\frac{1}{x}\Big)\sin x\,dx.$$

Esercizio 5. Calcolare tutti gli $\alpha > 0$ tali che converga ciascuno dei seguenti integrali impropri

$$1)\ \int_0^1 \frac{(1-\cos x)^\alpha}{\tan x - x}\,dx;\quad 2)\ \int_0^1 \frac{\sin(x^\alpha)}{\log(1+x)}\,dx;$$

$$3)\ \int_0^\infty \frac{\arctan\sqrt{x}-\pi/2}{x^\alpha}\,dx;\quad 4)\ \int_2^\infty \frac{\sin\frac{1}{x}}{\log^\alpha x}dx.$$

Esercizio 6. Studiare la convergenza dei seguenti integrali oscillatori

$$1)\ \int_2^\infty \frac{\sin x}{\log x}\,dx;\quad 2)\ \int_1^\infty \sin x \arcsin\frac{1}{x}\,dx;\quad 3)\ \int_0^\infty x\sin(x^4)\,dx.$$

Esercizio 7. i) Determinare tutti i parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che il seguente integrale improprio converga

$$\int_0^\infty \frac{1+x^\beta}{x^\alpha(1+x^2)}dx.$$

ii) Rappresentare i parametri ammissibili nel piano cartesiano $\alpha\beta$.

CAPITOLO 2

Introduzione alle equazioni differenziali ordinarie

1. Equazioni differenziali lineari del primo ordine

Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto e siano $a, b \in C(I)$ due funzioni continue. Un'equazione differenziale della forma

$$y' + a(x)y = b(x), \quad x \in I, \tag{1.3}$$

si dice equazione lineare del primo ordine. Fissati $x_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}$, possiamo prescrivere il valore della soluzione nel punto x_0:

$$y(x_0) = y_0. \tag{1.4}$$

Il problema di risolvere l'equazione differenziale (1.3) con la *condizione iniziale* (1.4) si chiama *Problema di Cauchy*. L'incognita del problema è una funzione $y \in C^1(I)$.

Dedurremo la formula risolutiva dell'equazione differenziale, e più in generale del Problema di Cauchy, con un argomento euristico. Consideriamo preliminarmente il caso $b = 0$:

$$y' + a(x)y = 0, \quad x \in I. \tag{1.5}$$

In questo caso, l'equazione differenziale si dice *omogenea*. Supponendo $y \neq 0$, ad esempio $y > 0$, l'equazione differenziale (1.5) si può riscrivere nella forma $y'/y = -a(x)$. Una primitiva della funzione y'/y è $\log y$. Dunque, indicando con A una primitiva di a, ovvero $A'(x) = a(x)$ per ogni $x \in I$, abbiamo

$$-A = \log y + d,$$

per qualche costante $d \in \mathbb{R}$. Segue che $y = \exp(-d - A)$ e ponendo $c = \mathrm{e}^{-d}$ troviamo la soluzione

$$y(x) = c\mathrm{e}^{-A(x)}, \quad x \in I. \tag{1.6}$$

Questa funzione risolve l'equazione omogenea per ogni $c \in \mathbb{R}$ (in altri termini la limitazione $y > 0$ può essere lasciata cadere).

Ora cerchiamo una soluzione della forma (1.6) per l'equazione non omogenea (1.3), dove ora $c \in C^1(I)$ è una funzione incognita che deve essere determinata. Questo metodo si chiama "variazione della costante". Inserendo $y' = c'\mathrm{e}^{-A} - ac\mathrm{e}^{-A}$ nell'equazione (1.3) otteniamo

$$c'\mathrm{e}^{-A} = b, \quad \text{ovvero} \quad c' = b\mathrm{e}^{A}.$$

Integrando tale equazione su un intervallo $(x_0, x) \subset I$ otteniamo

$$c(x) = c(x_0) + \int_{x_0}^{x} b(t)\mathrm{e}^{A(t)}dt,$$

e dunque troviamo

$$y(x) = \Big(c(x_0) + \int_{x_0}^{x} b(t)\mathrm{e}^{A(t)}dt\Big)\mathrm{e}^{-A(x)}, \quad x \in I, \tag{1.7}$$

dove $c(x_0) \in \mathbb{R}$ è un numero reale. Per ogni scelta di tale numero, la funzione (1.8) verifica l'equazione differenziale (1.3).

Il numero $c(x_0)$ si può determinare imponendo che l'integrale generale y verifichi la condizione iniziale $y(x_0) = y_0$. Si ottiene $c(x_0) = y_0\mathrm{e}^{A(x_0)}$. Dunque otteniamo la *formula di rappresentazione* per la soluzione del Problema di Cauchy:

$$y(x) = \Big(y_0\mathrm{e}^{A(x_0)} + \int_{x_0}^{x} b(t)\mathrm{e}^{A(t)}dt\Big)\mathrm{e}^{-A(x)}, \quad x \in I, \tag{1.8}$$

Nel prossimo teorema proviamo che il metedo seguito rileva in effetti l'*unica* soluzione del problema di Cauchy.

TEOREMA 1.1. Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto, $x_0 \in I$, $a, b \in C(I)$ e $y_0 \in \mathbb{R}$. Allora la funzione (1.8) risolve in modo unico il Problema di Cauchy (1.3)+(1.4).

Dim. Che la funzione (1.8) risolva il problema è un conto che ripercorre a ritroso l'argomento euristico. Proviamo che questa soluzione è l'unica.

Sia $z \in C^1(I)$ una soluzione dell'equazione differenziale (1.3) e consideriamo la funzione ausiliaria

$$w(x) = \mathrm{e}^{A(x)}z(x) - \int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}dt,$$

dove A è una primitiva di a. Dal momento che sull'intervallo I risulta

$$w' = (az + z')\mathrm{e}^{A} - b\mathrm{e}^{A} = 0,$$

per il Teorema di Lagrange la funzione w è costante su I, ovvero esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che $w(x) = k \in \mathbb{R}$ per ogni $x \in I$. Dunque, si ha

$$z(x) = \Big(k + \int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}dt\Big)\mathrm{e}^{-A(x)}.$$

D'altra parte, se z risolve anche la condizione iniziale $z(x_0) = y_0$ deve essere $k = y_0\mathrm{e}^{A(x_0)}$ e quindi z coincide con la funzione in (1.8).

2. Equazione differenziali a variabili separabili

Siano $I, J \subset \mathbb{R}$ due intervalli aperti e siano $f \in C(I)$ e $g \in C(J)$ due funzioni continue. Cerchiamo le soluzioni dell'equazione differenziale del primo ordine

$$y' = f(x)g(y), \quad x \in I, \tag{2.9}$$

per qualche intervallo $I_1 \subset I$. Una simile equazione si dice *a variabili separabili.* Eventualmente, fissati un punto $x_0 \in I$ e un valore $y_0 \in J$ possiamo prescrivere la condizione iniziale

$$y(x_0) = y_0. \tag{2.10}$$

Il problema (2.9)+(2.10) si chiama *Problema di Cauchy.*

Osserviamo preliminarmente che se $g(y_0) = 0$ allora la funzione costante $y(x) = y_0$, $x \in I$, è certamente una soluzione dell'equazione differenziale (2.9) che verifica la condizione iniziale.

Siccome vogliamo dividere per g, supponiamo che $g(y_0) \neq 0$. Allora risulta $g \neq 0$ in un intervallo aperto $J_1 \subset J$ che contiene y_0. Possiamo allora dividere e separare le variabili. L'equazione differenziale si riscrive nel seguente modo:

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x), \tag{2.11}$$

dove x varia in un intorno $I_1 \subset I$ del punto x_0 tale che $y(x) \in J_1$ per ogni $x \in I_1$.

Sia $G \in C^1(J_1)$ una primitiva di $1/g(y)$ (nella variabile y), definita nell'intervallo J_1 e dove risulta $g \neq 0$. La funzione G è strettamente monotona, perchè $G'(y) \neq 0$, e pertanto G è invertibile.

Sia poi $F \in C^1(I)$ una primitiva di f. Integrando l'equazione differenziale (2.11) si ottiene

$$G(y(x)) = F(x) + C, \quad x \in I_1. \tag{2.12}$$

Qui, $C \in \mathbb{R}$ è una costante che può essere determinata tramite la condizione iniziale, e precisamente $C = G(y_0) - F(x_0)$.

La soluzione del Problam di Cauchy è dunque

$$y(x) = G^{-1}(F(x) - F(x_0) + G(y_0)), \quad x \in I_1, \tag{2.13}$$

dove $G^{-1} : G(J_1) \to J_1$ è la funzione inversa di G. L'intervallo $I_1 \subset I$ è in generale più piccolo di I.

Il precedente argomento rileva due tipi di soluzione dell'equazione differenziale (2.9): le soluzioni costanti e le soluzioni per cui $g(y) \neq 0$. Potrebbero, tuttavia, esserci altre soluzioni. Se $g \neq 0$ su J, l'argomento prova che la soluzione è necessariamente della forma (2.13).

Teorema 2.1. *Siano $I, J \subset \mathbb{R}$ due intervalli aperti, $x_0 \in I$ e $y_0 \in J$, e siano $f \in C(I)$, $g \in C(J)$ tali che $g \neq 0$ su J. Allora il Problema di Cauchy (2.9)+(2.10) ha una soluzione unica $y \in C^1(I_1)$ data dalla formula (2.13), per qualche intervallo aperto $I_1 \subset I$ contenente x_0.*

La dimostrazione del teorema è contenuta nell'argomento precedente.

3. Equazioni differenziali lineari del secondo ordine

Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto e siano $a, b, f \in C(I)$ funzioni continue. In questa sezione studiamo l'equazione differenziale lineare del secondo ordine:

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x), \quad x \in I.$$

L'incognita è una funzione $y \in C^2(I)$. L'equazione differenziale si dice lineare perchè l'operatore differenziale $\mathcal{L} : C^2(I) \to C(I)$

$$\mathcal{L}(y) = y'' + a(x)y' + b(x)y$$

è un operatore lineare.

Il seguente teorema di esistenza e unicità della soluzione per il relativo problema di Cauchy è il corollario di un teorema più generale che sarà visto e provato nel corso di Analisi 3.

Teorema 3.1. Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto, $x_0 \in I$ e $y_0, y_0' \in \mathbb{R}$, e siano $a, b, f \in C(I)$ funzioni continue. Allora il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x), \quad x \in I, \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \end{cases} \tag{3.14}$$

ha un'unica soluzione $y \in C^2(I)$.

Studiamo ora il caso omogeneo $f = 0$. Consideriamo l'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea

$$S = \big\{ y \in C^2(I) : y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \text{ su } I \big\}.$$

Dal teorema precedente segue il seguente fatto.

Proposizione 3.2. L'insieme S delle soluzioni dell'equazione omogenea è uno spazio vettoriale reale di dimensione 2.

Dim. S è uno spazio vettoriale, perchè per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $y_1, y_2 \in S$, ovvero $\mathcal{L}(y_1) = \mathcal{L}(y_2) = 0$, risulta

$$\mathcal{L}(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha \mathcal{L}(y_1) + \beta \mathcal{L}(y_2) = 0,$$

e quindi $\alpha y_1 + \beta y_2 \in S$.

Proviamo che S ha dimensione esattamente 2. Fissato un punto $x_0 \in I$, definiamo la trasformazione $T : S \to \mathbb{R}^2$ definita nel seguente modo

$$T(y) = \big(y(x_0), y'(x_0)\big).$$

La trasformazione T è lineare. Proviamo che T è iniettiva e suriettiva. Ne segue che S ed $\mathbb{R}^2$ sono linearmente isomorfi e dunque $\dim(S) = \dim(\mathbb{R}^2) = 2$.

Prova dell'iniettività: se $T(y) = T(z)$ con $y, z \in S$ allora y e z risolvono lo stesso Problema di Cauchy (3.14) (con $f = 0$). Siccome per il Teorema 3.1 la soluzione del problema è unica, deve essere $y = z$.

Prova della suriettività: dato $(y_0, y_0') \in \mathbb{R}^2$, dal Teorema 3.1 segue l'esistenza di $y \in S$ tale che $T(y) = (y_0, y_0')$.

Dunque, lo spazio vettoriale S ha una base vettoriale composta da due soluzioni. Consideriamo due soluzioni $y_1, y_2 \in S$ (non necessariamente linearmente indipendenti). Formiamo la *matrice Wronskiana*

$$W_{y_1,y_2}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_2'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix},$$

e il *determinante Wronskiano*

$$w(x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_2'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x).$$

Chiaramente risulta $w \in C^1(I)$ e inoltre

$$\begin{aligned} w' &= y_1'y_2' - y_2'y_1' + y_1y_2'' - y_2y_1'' \\ &= y_1(-a(x)y_2' - b(x)y_2) - y_2(-a(x)y_1' - b(x)y_1) \\ &= -a(x)w. \end{aligned}$$

Integrando l'equazione differenziale scopriamo che il determinante Wronskiano ha la forma

$$w(x) = w(x_0) \exp\Big(- \int_{x_0}^{x} a(t)dt \Big), \quad x \in I.$$

In particolare, se $w(x_0) = 0$ in un punto $x_0 \in I$ allora $w = 0$ in tutti i punti.

PROPOSIZIONE 3.3. Siano $y_1, y_2 \in S$ soluzioni dell'equazione omogenea e sia $w = \det W_{y_1,y_2}$ il corrispondente determinante Wronskiano. Allora:

(A) y_1, y_2 sono linearmente dipendenti se e solo se esiste $x_0 \in I$ tale che $w(x_0) = 0$ (equivalentemente se e solo se $w = 0$ su I);

(B) y_1, y_2 sono linearmente indipendenti se e solo se esiste $x_1 \in I$ tale che $w(x_1) \neq 0$ (equivalentemente se e solo so $w \neq 0$ su I).

Dim. Proviamo (A). Se y_1, y_2 sono linearmente dipendenti allora esistono $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tali che $\alpha y_1 + \beta y_2 = 0$ su I. Derivando vale anche $\alpha y_1' + \beta y_2' = 0$ su I, e dunque

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_2' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Segue che $w = 0$ su tutto I.

Supponiamo ora che $w(x_0) = 0$ in un punto $x_0 \in I$. Allora, esistono $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$ tali che

$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_2'(x_0) & y_2'(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La funzione $z = \alpha y_1 + \beta y_2$ è in S e verifica $z(x_0) = 0$ e $z'(x_0) = 0$. Dall'unicità della soluzione per il Problema di Cauchy segue che $z = 0$ e quindi y_1, y_2 sono linermente dipendenti.

L'affermazione (B) segue da (A) per negazione.

4. Metodo della variazione delle costanti

In questa sezione illustriamo il metodo per calcolare una soluzione dell'equazione non omogenea

$$y'' + a(x)y + b(x)y = f(x), \quad x \in I, \tag{4.15}$$

una volta si sappia risolvere l'equazione omogenea corrispondente. Sia y_1, y_2 una base di soluzioni per l'equazione omogenea $y''+a(x)y+b(x)y = 0$. Cerchiamo una soluzione del tipo

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \tag{4.16}$$

dove $c_1, c_2 : I \to \mathbb{R}$ sono funzioni da determinare. Derivando la relazione si ottiene

$$y' = c_1' y_1 + c_1 y_1' + c_2' y_2 + c_2 y_2'.$$

Imponendo la condizione

$$c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \tag{4.17}$$

l'espressione precedente si riduce alla seguente

$$y' = c_1 y_1' + c_2 y_2'.$$

Derivando nuovamente si ottiene

$$y'' = c_1'y_1' + c_1y_1'' + c_2'y_2' + c_2y_2''.$$

Sostituendo nell'equazione differenziale di partenza, dopo qualche calcolo, si arriva alla seguente equazione

$$c_1(y_1'' + ay_1' + by_1) + c_2(y_2'' + ay_2' + by_2) + c_1'y_1' + c_2'y_2' = f.$$

Usando il fatto che y_1, y_2 risolvono l'equazione omogenea si ottiene la seconda condizione

$$c_1'y_1' + c_2'y_2' = f. \tag{4.18}$$

Mettendo a sistema le condizioni (4.17) e (4.18) si arriva al sistema

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}.$$

Nel sistema è apparsa la matrice Wronskiana di y_1, y_2. Per la Proposizione 3.3, questa matrice è invertibile in ogni punto $x \in I$. Questo permette di risolvere il sistema in c_1' e c_2':

$$\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}.$$

Le due equazioni del sistema possono essere integrate. Questo procedimento determina c_1 e c_2 a meno di due costanti additive che appaiono nel processo di integrazione. Una volta sostituite c_1 e c_2 nella (4.16), le due costanti possono essere determinate con delle eventuali condizioni iniziali.

5. Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti

Consideriamo un'equazione differenziale del tipo

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{5.19}$$

dove ora $a, b \in \mathbb{R}$ sono costanti. Si cercano soluzioni della forma $y(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$, dove $\lambda \in \mathbb{C}$ è un parametro complesso. Sostituendo le derivate $y' = \lambda \mathrm{e}^{\lambda x}$ e $y'' = \lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda x}$ nell'equazione differenziale si ottiene l'equazione

$$\mathrm{e}^{\lambda x}(\lambda^2 + a\lambda + b) = 0.$$

Siccome $\mathrm{e}^{\lambda x} \neq 0$, tale equazione è verificata se e solo se λ verifica l'*equazione caratteristica*:

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0.$$

Sia $\Delta = a^2 - 4b$ il discriminante dell'equazione. Si possono presentare tre casi.

1) $\Delta > 0$. L'equazione caratteristica ha due soluzioni reali distinte

$$\lambda_1 = \frac{-a - \sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{-a + \sqrt{\Delta}}{2}.$$

In questo caso, la soluzione generale y di (5.19) è una combinazione lineare delle soluzioni $y_1(x) = \mathrm{e}^{\lambda_1 x}$ e $y_2(x) = \mathrm{e}^{\lambda_2 x}$, che sono linearmente indipendenti:

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

dove $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

2) $\Delta < 0$. L'equazione caratteristica ha due soluzioni complesse coniugate

$$\lambda_1 = \frac{-a + i\sqrt{-\Delta}}{2} = \alpha + i\beta \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{-a - i\sqrt{-\Delta}}{2} = \alpha - i\beta$$

dove si è posto $\alpha = -a/2$ e $\beta = \sqrt{-\Delta}/2$. Le funzioni

$$z_1(x) = \mathrm{e}^{(\alpha+i\beta)x} = \mathrm{e}^{\alpha x}\mathrm{e}^{i\beta x} = \mathrm{e}^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$$
$$z_2(x) = \mathrm{e}^{(\alpha-i\beta)x} = \mathrm{e}^{\alpha x}\mathrm{e}^{-i\beta x} = \mathrm{e}^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x)$$

sono soluzioni a valori complessi dell'equazione differenziale. Dunque, le funzioni

$$y_1(x) = \frac{z_1(x) + z_2(x)}{2} = \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x$$
$$y_2(x) = \frac{z_1(x) - z_2(x)}{2i} = \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$$

sono soluzioni a valori reali dell'equazione differenziale. Le funzioni y_1 e y_2 sono linearmente indipendenti e dunque la soluzione generale dell'equazione differenziale è della forma

$$y(x) = (c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x)\mathrm{e}^{\alpha x}$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

3) $\Delta = 0$. L'equazione caratteristica ha la soluzione reale $\lambda = -a/2$ con molteplicità 2. In questo caso, il metodo produce una sola soluzione $y_1(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$. Un conto diretto mostra che la funzione $y_2(x) = x\mathrm{e}^{\lambda x}$ è pure una soluzione che è linearmente indipendente dalla precedente. In effetti, si ha:

$$\begin{aligned} y_2'' + ay_2' + by_2 &= 2\lambda\mathrm{e}^{\lambda x} + \lambda^2 x\mathrm{e}^{\lambda x} + a\big(\mathrm{e}^{\lambda x} + \lambda x\mathrm{e}^{\lambda x}\big) + bx\mathrm{e}^{\lambda x} \\ &= (\lambda^2 + a\lambda + b)x\mathrm{e}^{\lambda x} + (2\lambda + a)e^{\lambda x} = 0, \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio si è usato il fatto che che λ risolve l'equazione caratteristica e che $\lambda = -a/2$.

La soluzione generale dell'equazione (5.19) è dunque

$$y(x) = (c_1 + c_2 x)\mathrm{e}^{\lambda x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

6. Esercizi svolti

Esercizio 8. Cerchiamo la soluzione del Problema di Cauchy seguente

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1+2x}{\cos y} \\ y(0) = \pi. \end{cases} \tag{6.20}$$

L'equazione differenziale è a variabili separabili $y' = f(x)g(y)$ con $f(x) = 1 + 2x$ e $g(y) = 1/\cos y$. In particolare, g è definita per $\cos y \neq 0$, ovvero per $y \neq \pi/2 + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Siccome vogliamo che g sia definita su un intervallo, tenuto conto della condizione iniziale dovremo considerare $g : (\pi/2, 3\pi/2) \to \mathbb{R}$. Chiaramente $g \neq 0$.

Separando le variabili otteniamo $y'\cos y = 1 + 2x$, e integrando troviamo la soluzione generale in forma implicita dell'equazione differenziale

$$\sin y = x + x^2 + C,$$

dove $C \in \mathbb{R}$ è una costante che si determina con la condizione iniziale $y(0) = \pi$, ovvero $C = \sin y(0) = 0$.

Ora dobbiamo invertire la relazione $\sin y = x + x^2$. Osserviamo che l'inversione "meccanica"

$$z(x) = \arcsin(x + x^2)$$

non fornisce la soluzione del problema (6.20) perchè $z(0) = \arcsin(0) = 0$ e la condizione iniziale non è verificata.

Per determinare la soluzione corretta osserviamo che la funzione arcsin è l'inversa della funzione sin ristretta all'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$. Nel nostro caso, tuttavia, y prende valori in un intorno di π. Allora procediamo in questo modo. Ponendo $w(x) = y(x) - \pi$, abbiamo $w(0) = y(0) - \pi = 0$ e $\sin w = \sin(y - \pi) = -\sin y = -(x + x^2)$. Siccome w assume valori in un intorno di 0, è ora lecito invertire la funzione seno e otteniamo $w = -\arcsin(x + x^2)$ e quindi

$$y(x) = \pi - \arcsin(x + x^2).$$

Questa è la soluzione del problema, che è definita nell'intervallo aperto

$$I_1 = \{x \in \mathbb{R} : x + x^2 < 1\}.$$

Esercizio 9. Calcolare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' - y = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}.$$

L'equazione caratteristica è $\lambda^2 - 1 = 0$ le cui soluzioni sono $\lambda = \pm 1$. La soluzione generale dell'equazione omogenea è quindi $y = c_1 \mathrm{e}^x + c_2 \mathrm{e}^{-x}$. Calcoliamo la soluzione generale dell'equazione non omogenea con il metodo della variazione delle costanti. Cerchiamo una soluzione della forma

$$y = c_1(x)\mathrm{e}^x + c_2(x)\mathrm{e}^{-x},$$

con c_1, c_2 funzioni da determinare. Derivando si ottiene $y' = c_1'\mathrm{e}^x + c_1\mathrm{e}^x + c_2'\mathrm{e}^{-x} - c_2\mathrm{e}^{-x}$ e imponendo la prima condizione

$$c_1'\mathrm{e}^x + c_2'\mathrm{e}^{-x} = 0$$

si ha $y' = c_1\mathrm{e}^x - c_2\mathrm{e}^{-x}$ e quindi $y'' = c_1'\mathrm{e}^x + c_1\mathrm{e}^x - c_2'\mathrm{e}^{-x} + c_2\mathrm{e}^{-x}$. Sostituendo nell'equazione di partenza si trova

$$\mathrm{e}^x(c_1 + c_1') + \mathrm{e}^{-x}(c_2 - c_2') - c_1\mathrm{e}^x - c_2\mathrm{e}^{-x} = \frac{\mathrm{e}^x}{1 + \mathrm{e}^x},$$

e quindi si ottiene la seconda condizione

$$\mathrm{e}^x c_1' - c_2'\mathrm{e}^{-x} = \frac{\mathrm{e}^x}{1 + \mathrm{e}^x}.$$

Risolviamo il sistema delle due condizioni

$$\begin{cases} c_1'\mathrm{e}^x + c_2'\mathrm{e}^{-x} = 0 \\ c_1'\mathrm{e}^x - c_2'\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1 + \mathrm{e}^x}. \end{cases}$$

Sommando e sottraendo le due equazioni si ottiene

$$\begin{cases} c_1' = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x} \\ c_2' = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^x}. \end{cases}$$

Per determinare c_1 calcoliamo l'integrale indefinito

$$c_1(x) = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+\mathrm{e}^x}$$

mediante la sostituzione $t = \mathrm{e}^x$. Si ottiene

$$c_1(x) = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t(1+t)} = \frac{1}{2}\int \Big(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\Big)dt = \frac{1}{2}\log\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} + k_1,$$

dove $k_1 \in \mathbb{R}$ è una costante additiva. Per determinare $c_2(x)$ calcoliamo l'integrale

$$c_2(x) = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^x}dx$$

con la stessa sostituzione. Si ottiene

$$c_2(x) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^x + \frac{1}{2}\log(1+\mathrm{e}^x) + k_2,$$

con $k_2 \in \mathbb{R}$. In conclusione, si ottiene la soluzione generale

$$y(x) = \Big(\frac{1}{2}\log\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} + k_1\Big)\mathrm{e}^x + \Big(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^x + \frac{1}{2}\log(1+\mathrm{e}^x) + k_2\Big)\mathrm{e}^{-x},$$

dove $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ sono due costanti libere.

Esercizio 10. Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ studiare esistenza e unicità della soluzione $y \in C^1(\mathbb{R})$ del problema

$$\begin{cases} x^3y' - y + 1 = 0, \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

L'equazione differenziale è lineare del primo ordine. Tuttavia il coefficiente di y' si annulla nel punto $x = 0$, proprio dove è assegnato il dato iniziale.

Calcoliamo tutte le soluzioni dell'equazione dove $x \neq 0$. L'equazione omogenea $x^3y' = y$ ha le soluzioni

$$y(x) = c\mathrm{e}^{-\frac{1}{2x^2}}.$$

Cerchiamo una soluzione dell'equazione non omogenea della stessa forma, con $c = c(x)$ funzione da determinare. Derivando y e sostituendo nell'equazione si arriva all'identità

$$c'(x) = -\frac{1}{x^3}\mathrm{e}^{\frac{1}{2x^2}}.$$

Ora integriamo questa identità un un intervallo (x_0, x). La funzione che appare a destra non è integrabile in $x = 0$. Quindi l'intervallo di integrazione deve verificare $x, x_0 > 0$ oppure $x, x_0 < 0$. Integrando si ottiene

$$c(x) = c(x_0) - \int_{x_0}^{x} \frac{1}{t^3}\mathrm{e}^{\frac{1}{2t^2}}\,dt = k_1 + \mathrm{e}^{\frac{1}{2x^2}},$$

dove $k_1 \in \mathbb{R}$ è una costante. Siccome bisogna distinguere l'integrazione nel caso $x > 0$ e in quello $x < 0$, l'espressione generale per la funzione c è la seguente:

$$c(x) = \begin{cases} k_1 + \mathrm{e}^{\frac{1}{2x^2}}, & x > 0, \\ k_2 + \mathrm{e}^{\frac{1}{2x^2}}, & x < 0, \end{cases}$$

dove $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ sono due costanti indipendenti. Dunque, la soluzione generale dell'equazione differenziale è la seguente:

$$y(x) = \begin{cases} 1 + k_1\mathrm{e}^{-\frac{1}{2x^2}}, & x > 0, \\ 1 + k_2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2x^2}}, & x < 0. \end{cases}$$

Dal momento che

$$\lim_{x\to 0} y(x) = 1$$

indipendentemente da k_1, k_2, tutte le funzioni y si prolungano con continuità in $x = 0$ ponendo $y(0) = 1$. La funzione che ne risulta verifica in effetti $y \in C^1(\mathbb{R})$ con $y'(0) = 0$. La verifica di questo fatto è lasciata come esercizio.

Arriviamo alle seguenti conclusioni:

1) Per $\alpha \neq 1$ il problema non ha soluzioni.
2) Per $\alpha = 1$ il problema ha infinite soluzioni, che dipendono da due parametri reali.

7. Esercizi

Esercizio 11. Calcolare la soluzione generale delle seguenti equazioni differenziali:

$$\text{i) } y' = \frac{y\cos x}{1+\sin x} + \sin x; \quad \text{ii) } y' = \frac{3}{x}y + x^2 + 1, \quad x > 0.$$

Esercizio 12. Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = (y^2 - y)\log(2 + x).$$

i) Determinare il suo integrale generale.
ii) Risolvere il problema di Cauchy con dato $y(-1) = 1/2$.

Soluzione:

$$y(x) = \frac{e^{x+1}}{e^{x+1} + (x+2)^{x+2}}, \quad x + 2 > 0.$$

Esercizio 13. Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = (y-1)(y-4)\frac{\cos x}{\sin x}.$$

i) Trovare tutte le soluzioni costanti.
ii) Calcolare la soluzione generale dell'equazione in forma implicita.
iii) Calcolare in forma esplicita la soluzione del problema di Cauchy con dato iniziale $y(3\pi/2) = 5$.

Esercizio 14. Calcolare la soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}, \quad x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right), \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Soluzione: $y = \cos x \log(\cos x) + x \sin x$.

Esercizio 15 (Difficile). Calcolare la soluzione $y \in C^1(a, b)$, $-\infty \le a < 1 < b \le \infty$, del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y - x}{y + x}, \\ y(1) = 0, \end{cases}$$

e disegnare un grafico qualitativo di y. Calcolare b e mostrare che $a > -\frac{1}{2}e^{-\pi/2}$.

CAPITOLO 3

Curve in $\mathbb{R}^n$

Vedere il libro di testo, Capitolo 6 da p.311 a p.329

CAPITOLO 4

Spazi metrici e normati

1. Definizioni ed esempi

Definizione 1.1 (Spazio metrico). Uno spazio metrico è una coppia (X, d) dove X è un insieme e $d : X \times X \to [0, \infty)$ è una funzione, detta *metrica* o *distanza*, che per ogni $x, y, z \in X$ verifica le seguenti proprietà:

1) $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$;
2) $d(x, y) = d(y, x)$ (simmetria);
3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (disuguaglianza triangolare).

Definizione 1.2 (Spazio normato). Uno spazio normato (reale) è una coppia $(V, \|\cdot\|)$ dove V è uno spazio vettoriale reale e $\|\cdot\| : V \to [0, \infty)$ è una funzione, detta *norma*, che per ogni $x, y \in V$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ verifica le seguenti proprietà:

1) $\|x\| \geq 0$ e $\|x\| = 0$ se e solo se $x = 0$;
2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ (omogeneità);
3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (subadittività o disuguaglianza triangolare).

Fissato un punto $x \in X$ ed un raggio $r \geq 0$, l'insieme

$$B_r(x) = B(x, r) = B_X(x, r) = \big\{y \in X : d(x, y) < r\big\}$$

si dice *sfera* o *palla* (aperta) di centro x e raggio r. Nel seguito, useremo le palle per definire una *topologia* su uno spazio metrico.

Una norma $\|\cdot\|$ su uno spazio vettoriale V induce canonicamente una distanza d su V definita nel seguente modo:

$$d(x, y) = \|x - y\|, \quad x, y \in V.$$

La disuguaglianza triangolare per la distanza d deriva dalla subadittività della norma $\|\cdot\|$. Infatti, per ogni $x, y, z \in V$ si ha:

$$d(x, y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y).$$

Esempio 1.3 (Spazio metrico Euclideo). La funzione $|\cdot| : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$, $n \geq 1$, così definita

$$|x| = \Big(\sum_{i=1}^n x_i^2\Big)^{1/2}, \quad x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

è una norma su $\mathbb{R}^n$, detta *norma Euclidea*. Lo spazio metrico corrispondente $(\mathbb{R}^n, d)$, dove $d(x, y) = |x - y|$, si dice spazio (metrico) Euclideo. L'insieme

$$B_r(x) = \big\{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < r\big\}$$

è la palla Euclidea di raggio $r \geq 0$ centrata in $x \in \mathbb{R}^n$.

Con la notazione

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + ... + x_ny_n$$

per il *prodotto scalare standard* di $\mathbb{R}^n$, la norma Euclidea si esprime nel seguente modo: $|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Il prodotto scalare è bi-lineare nelle due componenti, è simmetrico, ed è non degenere. Precisamente, per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ valgono le seguenti propretà:

1) $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle$;
2) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$;
3) $\langle x, x\rangle = 0$ se e solo se $x = 0$.

Talvolta, il prodotto scalare si indica anche con il simbolo (x, y).

La verifica delle proprietà 1) e 2) per la norma Euclidea è elementare. Per verificare la subadittività occorre la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

Proposizione 1.4 (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz). Per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ vale la disuguaglianza

$$|\langle x, y\rangle| \leq |x||y|.$$

Dim. Il polinomio reale della variabile $t \in \mathbb{R}$:

$$P(t) = |x + ty|^2 = |x|^2 + 2\langle x, y\rangle + t^2|y|^2$$

non è mai negativo, $P(t) \geq 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, e dunque il suo discriminante verifica $\Delta = 4\langle x, y\rangle^2 - 4|x|^2|y|^2 \leq 0$. La tesi segue. $\square$

Verifichiamo la subadittività della norma Euclidea. Dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si ha

$$|x + y|^2 = \langle x + y, x + y\rangle = |x|^2 + 2\langle x, y\rangle + |y|^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2$$

ed estraendo le radici si ottiene la proprietà 3) di una norma.

Esempio 1.5 (Norma della convergenza uniforme). Consideriamo l'insieme $V = C([0, 1]; \mathbb{R}^n)$ delle funzioni continue a valori in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, definite sull'intervallo $[0, 1] \subset \mathbb{R}$. Queste funzioni hanno n componenti $f = (f_1, ..., f_n)$ e ciascuna componente è una funzione continua a valori reali. L'insieme V è uno spazio vettoriale reale. La funzione $\|\cdot\|_\infty : V \to [0, \infty)$

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

è una norma, detta *norma della convergenza uniforme* o *norma del sup*. Nella definizione, $|f(x)|$ è la norma Euclidea di $f(x) \in \mathbb{R}^n$. L'estremo superiore è un massimo per il Teorema di Weierstrass. Verifichiamo ad esempio la disuguaglianza triangolare per $f, g \in V$:

$$\begin{aligned}\|f + g\|_\infty &= \sup_{x\in[0,1]} |f(x) + g(x)| \leq \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + |g(x)| \\ &\leq \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |g(x)| = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.\end{aligned}$$

Nel caso $n = 1$, dati $f \in C([0, 1])$ ed $r \geq 0$, la palla

$$B_r(f) = \big\{g \in C([0, 1]) : |f(x) - g(x)| < r \text{ per ogni } x \in [0, 1]\big\}$$

è l'insieme delle funzioni continue g il cui grafico è contenuto nella striscia di spessore $2r$ attorno al grafico di f.

Esempio 1.6 (Norma integrale). Consideriamo l'insieme $V = C([0,1])$ delle funzioni continue a valori reali definite sull'intervallo $[0,1] \subset \mathbb{R}$. La funzione $\|\cdot\|_1 : V \to [0,\infty)$

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$$

è una norma, detta *norma della convergenza* $L^1([0,1])$. La verifica delle proprietà della norma è elementare. Ad esempio, la subadittività della norma $\|\cdot\|_1$ segue dalla subadittività del valore assoluto e dalla monotonia dell'integrale. Precisamente, per $f, g \in V$ si ha

$$\|f+g\|_1 = \int_0^1 |f(x)+g(x)|dx \leq \int_0^1 \big(|f(x)|+|g(x)|\big)dx = \int_0^1 |f(x)|dx + \int_0^1 |g(x)|dx.$$

La palla centrata nella funzione nulla $f = 0$

$$B_r(0) = \Big\{g \in C([0,1]) : \int_0^1 |g(x)|dx < r\Big\}$$

è l'insieme delle funzioni continue g con integrale di $|g|$ minore di $r \geq 0$.

2. Successioni in uno spazio metrico

Una successione in uno spazio metrico (X, d) è una funzione $x : \mathbb{N} \to X$. Si usa la seguente notazione $x_n = x(n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e la successione si indica con $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Definizione 2.1. Una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad un punto $x \in X$ nello spazio metrico (X, d) se

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0 \quad \text{ovvero} \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \forall n \geq \bar{n} : d(x_n, x) \leq \varepsilon.$$

In questo caso si scrive anche $x_n \to x$ per $n \to \infty$ in (X, d) oppure anche

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x,$$

si dice che la successione è *convergente* ovvero che x è il limite della successione.

Se il limite di una successione esiste allora è unico. Se infatti $x, y \in X$ sono entrambi limiti di $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, allora risulta

$$0 \leq d(x,y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) \to 0, \quad n \to \infty,$$

e quindi $d(x,y) = 0$ ovvero $x = y$.

3. Funzioni continue fra spazi metrici e in $\mathbb{R}^n$

Definizione 3.1. Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici e sia $x_0 \in X$. Una funzione $f : X \to Y$ si dice continua nel punto $x_0 \in X$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in X$ vale

$$d(x, x_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

La funzione si dice *continua* se è continua in tutti i punti di X.

Negli spazi metrici, la continuità è equivalente alla continuità sequenziale, nel senso del seguente teorema.

TEOREMA 3.2. Siano $f : X \to Y$ e $x_0 \in X$. Sono equivalenti le seguenti due affermazioni:

A) f è continua in x_0;

B) Per ogni successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X vale l'implicazione:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ in } X \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x) \text{ in } Y.$$

Dim. A)⇒B). Fissato $\varepsilon > 0$, dalla continuità di f segue l'esistenza di $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in X$ vale:

$$d_X(x, x_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Dalla convergenza della successione segue l'esistenza di $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per $n \geq \bar{n}$ si ha $d_X(x_n, x_0) < \delta$. Quindi per tali $n \geq \bar{n}$ deve essere $d_Y(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$.

B)⇒A). Supponiamo per assurdo che f non sia continua in $x_0 \in X$. Allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esistono dei punti $x_n \in X$ tali che $d_X(x_m, x_0) < 1/n$ ma $d_Y(f(x_n), f(x_0)) \geq \varepsilon$. La successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contraddice l'affermazione B). □

Per le funzioni $f : X \to \mathbb{R}$ a valori reali si possono definire in modo naturale le operazioni di somma, moltiplicazione e reciproco. Queste funzioni ereditano la continuità delle funzioni da cui sono composte.

TEOREMA 3.3. Sia (X, d_X) uno spazio metrico e sia $\mathbb{R}$ munito della distanza Euclidea. Siano $f, g : X \to \mathbb{R}$ funzioni continue in un punto $x_0 \in X$. Allora:

i) La funzione somma $f + g : X \to \mathbb{R}$ è continua nel punto x_0;

ii) La funzione prodotto $f \cdot g : X \to \mathbb{R}$ è continua nel punto x_0;

iii) Se $f \neq 0$ su X, allora la funzione reciproca $1/f : X \to \mathbb{R}$ è continua in x_0.

La dimostrazione si basa sulle analoghe proprietà dei limiti di successioni reali ed è omessa.

Specializziamo la discussione al caso di $X = \mathbb{R}^n$ e $Y = \mathbb{R}^m$, $n, m \geq 1$, entrambi muniti della rispettiva distanza Euclidea. Più precisamente, dato un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ consideriamo lo spazio metrico (A, d) dove d è la distanza Euclidea su A ereditata dallo spazio ambiente.

TEOREMA 3.4. Sia $f : A \to \mathbb{R}^m$ una funzione, $f = (f_1, ..., f_m)$, e sia $x_0 \in A \subset \mathbb{R}^m$ un punto fissato. Sono equivalenti:

A) f è continua in x_0;

B) le funzioni coordinate $f_1, ..., f_m : A \to \mathbb{R}$ sono continue in x_0.

Dim. L'implicazione A)⇒B) segue dalla disuguaglianza

$$|f_i(x) - f_i(x_0)| \leq |f(x) - f(x_0)|$$

che vale per ogni $i = 1, ..., m$ e per ogni $x \in A$.

L'implicazione B)⇒A) si verifica nel seguente modo. Fissato $\varepsilon > 0$, per ogni $i = 1, ..., m$ esiste $\delta_i > 0$ tale che

$$|x - x_0| < \delta_i \quad \Rightarrow \quad |f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon.$$

Con la scelta $\delta = \min\{\delta_1, ..., \delta_m\}$ vale allora l'implicazione

$$|x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \sqrt{m}\varepsilon.$$

Questo termina la dimostrazione. □

Esercizio 16. Determinare tutti i parametri reali $\alpha, \beta \geq 0$ tali che la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sotto definita sia continua nel punto $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ rispetto alla distanza Euclidea:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^\alpha |y|^\beta}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Per individuare una possibile risposta al quesito studiamo la funzione f ristretta ad una retta nel piano della forma $y = mx$ per qualche $m \in \mathbb{R}$. Precisamente, consideriamo la funzione $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ così definita per $x \neq 0$

$$\varphi(x) = f(x, mx) = \frac{|x|^{\alpha+\beta}|m|^\beta}{x^2 + m^2x^2} = |x|^{\alpha+\beta-2}\frac{|m|^\beta}{1+m^2}.$$

Al limite per $x \to 0$ si ottiene:

$$\lim_{x\to 0} \varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha+\beta > 2, \\ \frac{|m|^\beta}{1+m^2} & \text{se } \alpha+\beta = 2, \\ +\infty & \text{se } \alpha+\beta < 2. \end{cases}$$

Da questo fatto deduciamo che per $\alpha + \beta \leq 2$ la funzione f non è continua in $(0,0)$.

Proveremo che per $\alpha+\beta > 2$ la funzione è continua in $(0,0)$ usando la definizione. Partiamo dalla seguente disuguaglianza:

$$\frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{x^2+y^2} \leq (x^2+y^2)^{\alpha/2+\beta/2-1} = |(x,y)|^{\alpha+\beta-2}.$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$ e cerchiamo $\delta > 0$ tale che

$$d_{\mathbb{R}^2}((x,y),(0,0)) = |(x,y)| < \delta \quad \Rightarrow \quad d_{\mathbb{R}}(f(x,y), f(0,0)) = \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{x^2+y^2} < \varepsilon.$$

Per la disuguaglianza precedente, una possibile scelta di $\delta > 0$ che garantisce tale implicazione è la seguente:

$$\delta = \varepsilon^{\frac{1}{\alpha+\beta-2}}$$

dove la radice è ben definita per $\alpha + \beta > 2$.

Il precedente esercizio può essere risolto in modo efficiente anche utilizzando le coordinate polari nel piano.

Esercizio 17. Stabilire se la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sotto definita è continua nel punto $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ rispetto alla distanza Euclidea:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

L'esame di f lungo il fascio di rette $y = mx$, $m \in \mathbb{R}$, produce le seguenti informazioni. Chiaramente abbiamo

$$\varphi(x) = f(x, mx) = \frac{x^3 m}{x^4 + m^2x^2} = \frac{xm}{x^2+m^2},$$

e dunque, facendo il limite per $x \to 0$ con $m \in \mathbb{R}$ fissato, si trova:

$$\lim_{x\to 0} \varphi(x) = 0.$$

La restrizione di f ad una qualsiasi retta del fascio è continua nel punto $x = 0$. Questo non permette tuttavia di concludere che f è continua in $(0,0)$.

In effetti, f non è continua in $(0,0)$. Consideriamo infatti la restrizione di f ad una parabola della forma $y = mx^2$:

$$\psi(x) = f(x, mx^2) = \frac{x^4 m}{x^4 + m^2x^4} = \frac{m}{1+m^2}.$$

Se $m \neq 0$, la funzione ψ è una costante non nulla. Dunque per ogni $m \in \mathbb{R}$ è possibile scegliere successioni di punti $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nel piano tali che $(x_n, y_n) \to (0,0)$ per $n \to \infty$ e

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \frac{m}{1+m^2}.$$

Dunque, f non è continua in $(0,0)$.

Osservazione 3.5. L'Esercizio 17 mostra che esistono funzioni $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con le seguenti proprietà:

1) La funzione $x \mapsto f(x,y)$ è continua in $x \in \mathbb{R}$, per ogni $y \in \mathbb{R}$ fissato;
2) La funzione $y \mapsto f(x,y)$ è continua in $y \in \mathbb{R}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ fissato;
3) La funzione $(x,y) \mapsto f(x,y)$ non è continua, ad esempio nel punto $(0,0)$.

4. Spazi metrici completi

Definizione 4.1 (Successione di Cauchy). Una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in uno spazio metrico (X,d) si dice *di Cauchy* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \text{per ogni } m, n \geq \bar{n}.$$

Tutte le successioni convergenti sono di Cauchy, infatti se $x_n \to x$ allora per ogni $\varepsilon > 0$ si ha

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) \leq \varepsilon$$

per di scegliere $m, n \geq \bar{n}$ con $\bar{n} \in \mathbb{N}$ sufficientemente grande. Gli spazi metrici in cui tutte le successioni di Cauchy sono convergenti hanno propretà speciali.

Definizione 4.2 (Spazio metrico completo). Uno spazio metrico (X,d) si dice *completo* se ogni successione di Cauchy in (X,d) è convergente ad un elemento di X.

Definizione 4.3 (Spazio di Banach). Uno spazio di Banach (reale) è uno spazio normato (reale) $(V, \|\cdot\|)$ che è completo rispetto alla metrica indotta dalla norma.

4.1. Esempi di spazi di Banach.

Teorema 4.4. I numeri reali $\mathbb{R}$ con la distanza Euclidea formano uno spazio metrico completo.

Dim. Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di Cauchy in $\mathbb{R}$. Proviamo preliminarmente che la successione è limitata. Infatti, scelto $\varepsilon = 1$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|x_n - x_m| < 1$ per $m, n \geq \bar{n}$, e in particolare per $n \geq \bar{n}$ si ha

$$|x_n| \leq |x_{\bar{n}}| + |x_n - x_{\bar{n}}| \leq 1 + |x_{\bar{n}}|,$$

e dunque, per $n \in \mathbb{N}$ si ha la maggiorazione

$$|x_n| \le \max\{|x_1|, ..., |x_{\bar{n}-1}|, 1 + |x_{\bar{n}}|\}.$$

Per il Teorema di Bolzano-Weierstrass, dalla successione limitata $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si può estrarre una sottosuccessione convergente $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$. Ovvero esiste $x \in \mathbb{R}$ tale che $x_{n_j} \to x$ per $j \to \infty$.

Proviamo che $x_n \to x$ per $n \to \infty$. Fissato $\varepsilon > 0$ sia $\bar{n} \in \mathbb{N}$ data dalla condizione di Cauchy e scegliamo $j \in \mathbb{N}$ tale che $n_j \ge \bar{n}$ e $|x - x_{n_j}| < \varepsilon$. Allora per $n \ge \bar{n}$ risulta

$$|x_n - x| \le |x_n - x_{n_j}| + |x_{n_j} - x| \le 2\varepsilon.$$

Questo termina la dimostrazione. $\square$

Esempio 4.5. I numeri razionali $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ con la distanza Euclidea $d(x, y) = |x-y|$, $x, y \in \mathbb{Q}$, non sono uno spazio metrico completo. Infatti la successione

$$x_n = \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n \in \mathbb{Q}, \quad n \in \mathbb{N},$$

è di Cauchy, in quanto converge (in $\mathbb{R}$) al numero $\mathrm{e} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, ma il limite non è in $\mathbb{Q}$.

Esempio 4.6. Lo spazio k-dimensionale $\mathbb{R}^k$, $k \in \mathbb{N}$, con la norma Euclidea è uno spazio di Banach. Infatti, se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy in $\mathbb{R}^k$, allora indicando con x_n^i la coordinata i-esima di x_n, $i = 1, ..., k$, la successione $(x_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$ a valori reali è di Cauchy in $\mathbb{R}$ e dunque converge $x_n^i \to x^i \in \mathbb{R}$. Posto $x = (x^1, ..., x^k) \in \mathbb{R}^k$, da questo segue che $x_n \to x$ in $\mathbb{R}^k$:

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - x| = \lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{i=1}^k (x_n^i - x^i)^2\Big)^{1/2} = 0.$$

Esempio 4.7. Lo spazio $X = C([0, 1])$ con la distanza data dalla norma integrale

$$d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx$$

non è completo. Per $n \in \mathbb{N}$ sia $f_n \in C([0, 1])$ la funzione così definita

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1/2] \\ n(x - 1/2) & x \in [1/2, 1/2 + 1/n] \\ 1 & x \in [1/2 + 1/n, 1]. \end{cases}$$

La successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy. Infatti, dati $m, n \in \mathbb{N}$ con $m \ge n$ risulta

$$d(f_m, f_n) = \int_0^1 |f_n - f_m|dx \le \int_{1/2}^{1/2+1/n} (|f_n| + |f_m|)dx \le \frac{2}{n}.$$

La candidata funzione limite è la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1/2] \\ 1 & x \in (1/2, 1]. \end{cases}$$

In effetti, la funzione f è Riemann-integrabile su $[0, 1]$ e risulta

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|dx = 0,$$

ma f non è in $C([0,1])$ perchè ha un punto di discontinuità. Dunque la successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non converge ad un elemento di $X = C([0,1])$.

Teorema 4.8. Lo spazio $X = C([0,1];\mathbb{R}^k)$, $k \geq 1$, con la norma della convergenza uniforme:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

è uno spazio di Banach.

Dim. Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di Cauchy in X. Per ogni $x \in [0,1]$ fissato, la successione $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy in $\mathbb{R}^k$ e quindi è convergente. Esiste un punto che chiamiamo $f(x) \in \mathbb{R}^k$ tale che $f_n(x) \to f(x)$ per $n \to \infty$. Risulta definita una funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}^k$. Proviamo che:

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0.$$

Per ogni $\varepsilon > 0$ fissato, esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $x \in [0,1]$ vale

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \text{per } m, n \geq \bar{n}.$$

Facendo tendere $m \to \infty$ e usando la convergenza $f_m(x) \to f(x)$ per $m \to \infty$ si ottiene per ogni $x \in [0,1]$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{per } m, n \geq \bar{n}.$$

Questo prova l'affermazione.

Rimane da provare che $f \in X$, ovvero che $f : [0,1] \to \mathbb{R}^k$ è continua. Verifichiamo la continuità in un generico punto $x_0 \in [0,1]$. Fissato $\varepsilon > 0$ scegliamo un $n \geq \bar{n}$ a nostro piacere. Siccome la funzione f_n è continua in x_0, esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in [0,1]$ si ha

$$|x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon.$$

Dunque, per $|x - x_0| < \delta$ si ottiene

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \leq 3\varepsilon.$$

Questo prova la continuità di f.

5. Convergenza puntuale e convergenza uniforme

Sia $A \subset \mathbb{R}^k$ un un insieme e siano $f, f_n : A \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, funzioni.

Definizione 5.1 (Convergenza puntuale). Diciamo che la successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente ad f su A se per ogni $x \in A$ risulta

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Definizione 5.2 (Convergenza uniforme). Diciamo che la successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente ad f su A se per ogni $x \in A$ risulta

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

La convergenza uniforme implica quella puntuale ma non viceversa.

Esempio 5.3. Sia $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, la funzione $f_n(x) = x^n$. Per $x \in [0,1]$ si ha il limite puntuale

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \le x < 1, \\ 1 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

D'altra parte la convergenza, la convergenza non è uniformementein quanto per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = 1.$$

Ripetendo parola per parola la parte finale della dimostrazione del Teorema 4.8 si prova il seguente fatto:

Teorema 5.4. Siano $A \subset \mathbb{R}^k$, $k \ge 1$, $f_n \in C(A;\mathbb{R})$ funzioni continue ed $f : A \to \mathbb{R}$. Se $f_n \to f$ per $n \to \infty$ uniformemente su A allora $f \in C(A;\mathbb{R})$ e per ogni $x_0 \in A$ vale il teorema sullo scambio dei limiti:

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

6. Teorema delle contrazioni di Banach

Sia X un insieme e sia $T : X \to X$ una funzione da X in se stesso. Siamo interessati all'esistenza di soluzioni $x \in X$ dell'equazione $T(x) = x$. Un simile elemento $x \in X$ si dice *punto fisso* di T.

Definizione 6.1 (Contrazione). Sia (X, d) uno spazio metrico. Un'applicazione (funzione) $T : X \to X$ è una *contrazione* se esiste un numero $0 < \lambda < 1$ tale che $d(T(x), T(y)) \le \lambda d(x, y)$ per ogni $x, y \in X$.

Teorema 6.2 (Banach). Sia (X, d) uno spazio metrico completo e sia $T : X \to X$ una contrazione. Allora esiste un unico punto $x \in X$ tale che $x = T(x)$.

Dim. Sia $x_0 \in X$ un qualsiasi punto e si definisca la successione $x_n = T^n(x_0) = T \circ ... \circ T(x_0)$, n-volte. Proviamo che la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy. Infatti, per la disuguaglianza triangolare si ha per ogni $n, k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} d(x_{n+k}, x_n) &\le \sum_{h=1}^{k} d(x_{n+h}, x_{n+h-1}) = \sum_{h=1}^{k} d(T^{n+h}(x_0), T^{n+h-1}(x_0)) \\ &\le d(T(x_0), x_0) \sum_{h=1}^{k} \lambda^{n+h-1} \le \lambda^n d(T(x_0), x_0) \sum_{h=1}^{\infty} \lambda^{h-1}. \end{aligned}$$

La serie converge e $\lambda^n \to 0$ per $n \to \infty$, dal momento che $\lambda < 1$. Poichè X è completo, esiste un punto $x \in X$ tale che $x = \lim_{n\to\infty} T^n(x_0)$.

Proviamo che $x = T(x)$. La funzione $T : X \to X$ è continua e quindi abbiamo

$$x = \lim_{n\to\infty} T^n(x_0) = \lim_{n\to\infty} T(T^{n-1}(x_0)) = T(\lim_{n\to\infty} T^{n-1}(x_0)) = T(x).$$

Proviamo infine che il punto fisso è unico. Sia $\bar{x} \in X$ tale che $\bar{x} = T(\bar{x})$. Allora abbiamo

$$d(x, \bar{x}) = d(T(x), T(\bar{x})) \le \lambda d(x, \bar{x}) \quad \Rightarrow \quad d(x, \bar{x}) = 0,$$

perchè $\lambda < 1$, e quindi $x = \bar{x}$.

7. Topologia di uno spazio metrico

Definizione 7.1 (Insiemi aperti e chiusi). Sia (X, d) uno spazio metrico

i) Un insieme $A \subset X$ si dice *aperto* se per ogni $x \in A$ esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B_\varepsilon(x) \subset A$.
ii) Un insieme $C \subset X$ si dice *chiuso* se $X \setminus C$ è aperto.

Esempio 7.2.

1) Gli insiemi $\emptyset, X$ sono contemporaneamente aperti e chiusi.
2) In $X = \mathbb{R}$ con la distanza $d(x, y) = |x - y|$ valgono i seguenti fatti:
   i) Gli intervalli (a, b) con $-\infty \le a, b \le \infty$ sono aperti.
   ii) Gli intervalli $[a, b]$ con $-\infty < a < b < \infty$ sono chiusi.
   iii) Gli intervalli $[a, \infty)$ e $(-\infty, b]$ con $-\infty < a, b < \infty$ sono chiusi.
   iv) Gli intervalli $(a, b]$ e $[a, b)$ con $-\infty < a, b < \infty$ non sono nè aperti nè chiusi.
3) In $X = \mathbb{R}^2$ con la distanza Euclidea:
   i) Il cerchio $\{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$ è aperto.
   ii) Il cerchio $\{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \le 1\}$ è chiuso.
4) In uno spazio metrico generico (X, d) le palle $B_r(x)$, $x \in X$ e $r > 0$, sono aperte. Sia infatti $y \in B_r(x)$ ovvero $s := d(x, y) < r$. Scegliamo $\varepsilon > 0$ tale che $s + \varepsilon < r$. Se $z \in B_\varepsilon(y)$ allora dalla disuguaglianza triangolare segue che
$$d(z, x) \le d(z, y) + d(y, x) < \varepsilon + s < r$$
e quindi $B_\varepsilon(y) \subset B_r(x)$.

Definizione 7.3 (Interno e chiusura). Sia $A \subset X$ un insieme.

i) Un punto $x \in X$ si dice *punto interno di* A se esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B_\varepsilon(x) \subset A$.
ii) L'*interno di* A è l'insieme
$$A^\circ = \big\{x \in X : x \text{ è un punto interno di } A\big\}.$$
iii) Un punto $x \in X$ si dice *punto di chiusura di* A se per ogni $\varepsilon > 0$ risulta $B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$.
iv) La *chiusura di* A è l'insieme
$$\overline{A} = \big\{x \in A : x \text{ è un punto di chiusura di } A\ \big\}.$$
v) La *frontiera di* A è l'insieme
$$\partial A = \big\{x \in X : B_r(x) \cap A \neq \emptyset \text{ e } B_r(x) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset \text{ per ogni } r > 0\big\}.$$
In altri termini, $\partial A = \overline{A} \cap (\overline{X \setminus A})$.

Esempio 7.4. In $\mathbb{R}^2$ con la distanza Euclidea consideriamo il cerchio aperto $A = \big\{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\big\}$. Allora:

i) $A = A^\circ$, infatti A è aperto.
ii) La chiusura di A è il cerchio chiuso $\overline{A} = \big\{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \le 1\big\}$.
iii) La frontiera di A è la circonferenza-bordo $\partial A = \big\{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\big\}$.

Proposizione 7.5. Siano $A \subset X$ un insieme e $x \in X$. Sono equivalenti:

A) $x \in \overline{A}$;
B) Esiste una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $x_n \in A$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ tale che $x_n \to x$ per $n \to \infty$.

Dim. A)⇒B) Se $x \in \overline{A}$ allora per ogni $r > 0$ risulta $B_r(x) \cap A \neq \emptyset$. I particolare, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $x_n \in A \cap B_{1/n}(x)$. La successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è contenuta in A e converge ad x in quanto $d(x_n, x) < 1/n$.

B) ⇒ A) Proviamo che la negazione di A) implica la negazione di B). Se $x \notin \overline{A}$ allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset$ e quindi non può esiste una successione contenuta in A convergente a x.

Teorema 7.6. Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $A \subset X$. Allora:

i) A è aperto se e solo se $A = A^\circ$;
ii) A è chiuso se e solo se $A = \overline{A}$.

Dim. La prova di i) è lasciata come esercizio. Proviamo ii).

Se A è chiuso allora $X \setminus A$ è aperto. È sufficiente provare che $\overline{A} \subset A$, perchè l'inclusione $A \subset \overline{A}$ è sempre verificata. Sia $x \in \overline{A}$. Se per assurdo fosse $x \in X \setminus A$ allora esisterebbe $\varepsilon > 0$ tale che $B_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset$ e non ci sarebbe una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contenuta in A tale che $x_n \to x$ per $n \to \infty$. Dunque deve essere $x \in A$.

Supponiamo ora che sia $A = \overline{A}$ e proviamo che A è chiuso, ovvero che il complementare $X \setminus A = X \setminus \overline{A}$ è aperto. Sia $x \in X \setminus \overline{A}$ un punto che non è di chiusura per A. Allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset$. Se così non fosse ci sarebbe una successione in A che converge ad x. Ma allora $B_\varepsilon(x) \subset X \setminus A$, che dunque è aperto. □

Esempio 7.7. Sia $A = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ la palla di raggio unitario in $\mathbb{R}^n$ centrata nell'origine. Siccome A è aperto risulta $A^\circ = A$. La chiusura di A è la palla chiusa

$$\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}.$$

Infatti, i punti sulla circonferenza $|x| = 1$ possono essere approssimati con successioni di punti contenuti in A. I punti nell'esterno, ovvero i punti $x \in \mathbb{R}^n$ tali che $|x| > 1$, non possono invece essere approssimati con successioni contenute in A e dunque non appartengono alla chiusura di A.

Definizione 7.8. Sia (X, d) uno spazio metrico. La famiglia di insiemi

$$\tau(X) = \{A \subset X : A \text{ è aperto in } X\}$$

si dice *topologia* di X.

Teorema 7.9. La topologia di uno spazio metrico X verifica i seguenti assiomi:

(A1) $\emptyset, X \in \tau(X)$;
(A2) Se $A_1, A_2 \in \tau(X)$ allora $A_1 \cap A_2 \in \tau(X)$;
(A3) Per ogni famiglia di indici $\mathcal{A}$ risulta

$$A_\alpha \in \tau(X) \text{ per ogni } \alpha \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} A_\alpha \in \tau(X).$$

La verifica di questo teorema è elementare ed è omessa. In particolare, l'assioma (A2) si estende ad intersezioni *finite* di aperti. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale:

$$A_1, ..., A_n \in \tau(X) \quad \Rightarrow \quad \bigcap_{k=1}^{n} A_k \in \tau(X).$$

L'assioma (A2), tuttavia, non si estende ad intersezioni *numerabili* di aperti. Infatti, l'insieme

$$\big\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \le 1\big\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Big\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1 + \frac{1}{n}\Big\}$$

non è aperto per essendo intersezione numerabile di aperti.

Osservazione 7.10. In modo duale, la famiglia dei chiusi di uno spazio metrico verifica i seguenti assiomi:

(C1) $\emptyset, X$ sono chiusi;
(C2) Se C_1, C_2 sono chiusi allora $C_1 \cup C_2$ è chiuso;
(C3) Per ogni famiglia di indici $\mathcal{A}$ risulta

$$A_\alpha \text{ è chiuso per ogni } \alpha \in \mathcal{A} \ \Rightarrow \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha \text{ è chiuso.}$$

In generale, l'unione numerabile di chiusi non è chiuso.

Teorema 7.11 (Caratterizzazione topologica della continuità). Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici e sia $f : X \to Y$ una funzione. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

1) f è continua;
2) $f^{-1}(A) \subset X$ è aperto in X per ogni aperto $A \subset Y$;
3) $f^{-1}(C) \subset X$ è chiuso in X per ogni chiuso $C \subset Y$.

Dim. Proviamo l'implicazione 1)⇒2). Verifichiamo che ogni punto $x_0 \in f^{-1}(A)$ è un punto interno di $f^{-1}(A)$. Siccome A è aperto e $f(x_0) \in A$, esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B_Y(f(x_0), \varepsilon) \subset A$. Per la continuità di f esiste $\delta > 0$ tale che $d_X(x, x_0) < \delta$ implica $d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. In altre parole, si ha $f(B_X(x_0, \delta)) \subset B_Y(f(x_0), \varepsilon)$. Ma allora si conclude che

$$B_X(x_0, \delta) \subset f^{-1}(f(B_X(x_0, \delta)) \subset f^{-1}(B_Y(f(x_0), \varepsilon)) \subset f^{-1}(A).$$

Notare che l'inclusione a sinistra in generale non è un'uguaglianza.

Proviamo l'implicazione 2)⇒1). Controlliamo che f è continua in un generico punto $x_0 \in X$. Fissato $\varepsilon > 0$, l'insieme $B_Y(f(x_0), \varepsilon))$ è aperto e quindi l'antiimmagine $f^{-1}(B_Y(f(x_0), \varepsilon))$ è aperta. Siccome $x_0 \in f^{-1}(B_Y(f(x_0), \varepsilon))$, esiste $\delta > 0$ tale che

$$B_X(x_0, \delta) \subset f^{-1}(B_Y(f(x_0), \varepsilon)),$$

da cui segue che

$$f(B_X(x_0, \delta)) \subset f(f^{-1}(B_Y(f(x_0), \varepsilon))) \subset B_Y(f(x_0), \varepsilon).$$

Notare che l'ultima inclusione in generale non è un'uguaglianza. La catena di inclusioni provata mostra che se $d_X(x, x_0) < \delta$ allora $d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$, che è la continuità di f in x_0.

Per provare l'equivalenza 2)$\Leftrightarrow$3) si usa la seguente relazione insiemistica valida per ogni $B \subset Y$:

$$X \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(Y \setminus B).$$

Verifichiamo ad esempio 2)$\Rightarrow$3). Sia $C \subset Y$ chiuso. Allora $A = Y \setminus C$ è aperto e quindi $f^{-1}(A) = f^{-1}(Y \setminus C) = X \setminus f^{-1}(C)$ è aperto. Ovvero, $f^{-1}(C)$ è chiuso.

Osservazione 7.12. Nella dimostrazione precedente abbiamo usato le seguenti relazioni insiemistiche, per una funzione $f : X \to Y$:

i) $A \subset f^{-1}(f(A))$ per ogni insieme $A \subset X$;
ii) $f(f^{-1}(B)) \subset B$ per ogni insieme $B \subset Y$.

Teorema 7.13. Siano (X, d_X), (Y, d_Y) e (Z, d_Z) spazi metrici e siano $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ funzioni continue. Allora la composizione $g \circ f : X \to Z$ è continua.

Dim. Usiamo la caratterizzazione 2) di continuità nel Teorema precedente. Se $A \subset Z$ è un aperto allora $g^{-1}(A) \subset Y$ è un aperto, e dunque $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A)) \subset X$ è un aperto. □

8. Esercizi svolti in classe

Esercizio 18. Si consideri la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \frac{(n+1)x + n^2x^3}{1 + n^2x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ su sottoinsiemi (ad esempio intervalli) di $\mathbb{R}$.

Risposte. La successione converge puntualmente su $\mathbb{R}$ alla funzione $f(x) = x$. Su intervalli del tipo $[0, \varepsilon]$, $(0, \varepsilon]$, $[-\varepsilon, 0)$, etc. con $\varepsilon > 0$, non c'è convergenza uniforme. Su insiemi del tipo $(-\infty, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, \infty)$ con $\varepsilon > 0$ c'è convergenza uniforme.

Esercizio 19. Sia $\alpha \in (0, 1]$ e definiamo la funzione $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$

$$d(x, y) = |x - y|^\alpha, \quad x, y \in \mathbb{R}^n,$$

dove $|\cdot|$ indica la norma Euclidea di $\mathbb{R}^n$. Provare che $(\mathbb{R}^n, d)$ è uno spazio metrico.

Cenni di soluzione. Per provare la disuguaglianza triangolare si usa la disuguaglianza

$$(t + s)^\alpha \le t^\alpha + s^\alpha, \quad s, t \ge 0,$$

che è valida per $0 < \alpha \le 1$. La verifica di tale disuguaglianza si riduce a controllare che

$$(t + 1)^\alpha \le t^\alpha + 1, \quad t \ge 0.$$

Questa disuguaglianza segue dal fatto che $(t + 1)^{\alpha-1} \le t^{\alpha-1}$ per $t > 0$ in quanto $\alpha - 1 \le 0$.

Esercizio 20. Determinare tutti i numeri $\alpha \ge 0$ tali che la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \sqrt{1 + \alpha x^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

sia una contrazione rispetto alla distanza Euclidea.

Cenni di soluzione. Con disuguaglianze elementari oppure utilizzando il Teorema di Lagrange si arriva alla disuguaglianza

$$|f(x) - f(y)| \leq \sqrt{a}|x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Dunque se $\alpha < 1$ la funzione f è una contrazione.

Se $\alpha \geq 1$ l'equazione di punto fisso $f(x) = x$ non ha soluzione. Quindi f non è una contrazione. Alternativamente, si può mostrare che

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{|f(x) - f(0)|}{|x|} = \sqrt{a}.$$

Esercizio 21. Sia $h \in C([0,1])$ una funzione assegnata. Verificare che l'equazione funzionale

$$f(x) = h(x) + \frac{1}{2}\sin(x)\int_0^x f(t)dx, \quad x \in [0,1],$$

ha una soluzione unica $f \in C([0,1])$.

Cenni di soluzione. Sia $X = C([0,1])$ con la norma della convergenza uniforme e sia $T : X \to X$ la trasformazione

$$T(f)(x) = h(x) + \frac{1}{2}\sin(x)\int_0^x f(t)dx, \quad x \in [0,1].$$

Verifichiamo che T è una contrazione. Infatti, per ogni $f, g \in X$ si ha

$$|T(f)(x) - T(g)(x)| = \left|\frac{1}{2}\sin(x)\int_0^x (f(t) - g(t))dx\right| \leq \frac{1}{2}\|f - g\|_\infty, \quad x \in [0,1]$$

e dunque

$$\|T(f) - T(g)\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|f - g\|_\infty.$$

Dunque T è una contrazione e per il Teorema di punto fisso di Banach T ha in X un unico punto fisso.

9. Esercizi

Esercizio 22. Studiare la convergenza puntuale e uniforme su opportuni sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ della successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ così definita

$$f_n(x) := \frac{1 + x^n}{n + x^{2n}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 23. Sia (X, d) uno spazio metrico e definiamo la funzione $\delta : X \times X \to [0, \infty)$

$$\delta(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}, \quad x, y \in X.$$

Verificare che (X, δ) è uno spazio metrico.

Esercizio 24. Sia $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ la funzione così definita:

$$d(x, y) = \begin{cases} |x - y| & \text{se } x, y \text{ e } 0 \text{ sono collineari,} \\ |x| + |y| & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Provare che d è una metrica su $\mathbb{R}^2$ e descrivere (graficamente) le palle in questa metrica.

Esercizio 25. Definiamo le funzioni $|\cdot|_1, |\cdot|_\infty : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$

$$|x|_1 = |x_1| + ... + |x_n|, \quad |x|_\infty = \max\{|x_1|, ..., |x_n|\}, \quad x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Provare che $(\mathbb{R}^n, |\cdot|_1)$ e $(\mathbb{R}^n, |\cdot|_\infty)$ sono spazi normati e che come spazi metrici sono completi.

Esercizio 26. Sia $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$ la funzione

$$d(x, y) = \arctan(|x - y|), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Provare che $(\mathbb{R}, d)$ è uno spazio metrico. Stabilire se tale spazio metrico è completo.

Esercizio 27. Sia $V = C([0, 1])$. 1) Provare che la funzione $\|\cdot\|_2 : V \times V \to [0, \infty)$ così definita

$$\|f\|_2 = \Big(\int_0^1 |f(x)|^2 dx\Big)^{1/2}$$

è una norma su V. Provare preliminarmente che per ogni $f, g \in V$ vale la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$\Big|\int_0^1 f(x)g(x)dx\Big| \le \|f\|_2 \|g\|_2$$

2) Dire se il corrispondente spazio metrico è completo.

Esercizio 28. Siano $\lambda \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}^n$ e consideriamo la funzione $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$T(x) = \lambda x + b, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

1) Calcolare una formula per l'iterazione $T^k(x_0) = T \circ ... \circ T(x_0)$ k volte, dove $x_0 \in \mathbb{R}^n$ è un punto fissato;
2) Stabilire per quali valori di λ la trasformazione T è una contrazione rispetto alla distanza Euclidea e per tali valori calcolare il limite di $T^k(x_0)$ per $k \to \infty$.

Esercizio 29. Provare che un insieme aperto $A \subset \mathbb{R}$ è l'unione numerabile di intervalli aperti disgiunti.

Esercizio 30. Siano (X, d) uno spazio metrico e $A \subset X$ un suo sottoinsieme. Provare le seguenti affermazioni:

i) A° è il più grande insieme aperto contenuto in A;
ii) $\overline{A}$ è il più piccolo insieme chiuso che contiene A.

Esercizio 31. Sia $\mathbb{R}$ munito della distanza Euclidea e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Provare o confutare tramite controesempi le seguenti affermazioni: i) $f(A)$ aperto $\Rightarrow A$ aperto; ii) A aperto $\Rightarrow f(A)$ aperto; iii) $f(A)$ chiuso $\Rightarrow A$ chiuso; ii) A chiuso $\Rightarrow f(A)$ chiuso.

Esercizio 32. Sia (X, d) uno spazio metrico. Per $x_0 \in X$ ed $r > 0$ definiamo

$$B_r(x_0) = \big\{x \in X : d(x, x_0) < r\big\},$$
$$K_r(x_0) = \big\{x \in X : d(x, x_0) \le r\big\},$$
$$S_r(x_0) = \big\{x \in X : d(x, x_0) = r\big\}.$$

Provare che $\partial B_r(x_0) \subset S_r(x_0)$ e che $\overline{B_r(x_0)} \subset K_r(x_0)$. Mostrare tramite esempi che le inclusioni possono essere strette.

Esercizio 33. Sia (X, d) uno spazio metrico e siano $K_1, ..., K_n \subset X$ insiemi compatti. Provare che $K_1 \cup ... \cup K_n$ e $K_1 \cap ... \cap K_n$ sono ancora compatti. È vero che l'unione numerabile di compatti è ancora un insieme compatto? È vero che l'intersezione numerabile di compatti è ancora un insieme compatto?

Esercizio 34. Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $K \subset X$ un sottoinsieme chiuso. Provare che:

(1) Se X è compatto allora anche K è compatto.
(2) Se X è completo allora anche K è completo con la distanza ereditata da X.

Esercizio 35. Si consideri il seguente sottoinsieme del piano:

$$M = \big\{(x, \sin(1/x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, 1]\big\} \cup \big\{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1, 1]\big\}.$$

Provare che M è connesso ma non è connesso per archi.