

Analisi 2

Roberto Monti

APPUNTI DEL CORSO - VERSIONE DEL 3 GIUGNO 2011

Indice

Capitolo 1. Teoria dell'integrale di Riemann. Integrali generalizzati	5
1. Integrali impropri su intervallo illimitato	5
2. Convergenza assoluta	7
3. Integrali oscillatori	8
4. Integrali impropri di funzioni non limitate	9
5. Esercizi	10
Capitolo 2. Introduzione alle equazioni differenziali ordinarie	13
1. Equazioni differenziali lineari del primo ordine	13
2. Equazione differenziali a variabili separabili	14
3. Equazioni differenziali lineari del secondo ordine	15
4. Metodo della variazione delle costanti	17
5. Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti	18
6. Esercizi svolti	19
7. Esercizi	22
Capitolo 3. Curve in \mathbb{R}^n	25
Capitolo 4. Spazi metrici e normati	27
1. Definizioni ed esempi	27
2. Successioni in uno spazio metrico	29
3. Funzioni continue fra spazi metrici e in \mathbb{R}^n	29
4. Spazi metrici completi	32
5. Convergenza puntuale e convergenza uniforme	34
6. Teorema delle contrazioni di Banach	35
7. Topologia di uno spazio metrico	36
8. Spazi metrici compatti. Teorema di Weierstrass	39
9. Insiemi connessi	40
10. Esercizi svolti in classe	43
11. Esercizi	47
Capitolo 5. Calcolo differenziale in più variabili	49
Capitolo 6. Teoremi di invertibilità locale e della funzione implicita	51
1. Teorema di invertibilità locale	51

Teoria dell'integrale di Riemann. Integrali generalizzati

1. Integrali impropri su intervallo illimitato

DEFINIZIONE 1.1. Siano $a \in \mathbb{R}$ ed $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che la restrizione $f: [a, M] \rightarrow \mathbb{R}$ sia (limitata e) Riemann-integrabile per ogni $a \leq M < \infty$. Diciamo che f è *integrabile in senso improprio su* $[a, \infty)$ se esiste finito il limite

$$(1.1) \quad I = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_a^M f(x) dx.$$

In questo caso, chiamiamo il numero reale

$$\int_a^\infty f(x) dx = I$$

integrale improprio di f su $[a, \infty)$ ovvero diciamo che l'integrale improprio *converge*. Se il limite non esiste oppure esiste ma infinito diremo che l'integrale improprio di f *diverge*.

L'integrale improprio eredita dall'integrale di Riemann le proprietà di linearità, di monotonia e di decomposizione del dominio.

ESEMPIO 1.2. Studiamo la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro reale $\alpha > 0$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx.$$

Nel caso $\alpha \neq 1$ si ha

$$\int_1^M \frac{1}{x^\alpha} dx = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_{x=1}^{x=M} = \frac{M^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha}$$

e quindi:

a) Se $\alpha > 1$ l'integrale converge

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{M^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} = \frac{1}{\alpha-1};$$

b) Se $0 < \alpha < 1$ l'integrale diverge

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{M^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} = \infty.$$

Nel caso $\alpha = 1$ si ha per ogni $M > 1$

$$\int_1^M \frac{1}{x} dx = \log M,$$

e quindi l'integrale diverge

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \log M = \infty.$$

□

Osserviamo che se $f \geq 0$ è una funzione non negativa su $[0, \infty)$, allora il limite in (1.1) esiste finito oppure infinito. Infatti, la funzione

$$I(M) = \int_a^M f(x) dx$$

è monotona per $M \geq a$ e dunque ha limite per $M \rightarrow \infty$.

TEOREMA 1.3 (Criterio del confronto). Siano $f, g : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, due funzioni Riemann-integrabili su ogni intervallo $[a, M] \subset \mathbb{R}$ con $a \leq M < \infty$. Supponiamo che esista $\bar{x} \geq a$ tale che $0 \leq f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \geq \bar{x}$. Allora:

$$\begin{aligned} \text{a) } \int_a^{\infty} g(x) dx < \infty &\Rightarrow \int_a^{\infty} f(x) dx < \infty; \\ \text{b) } \int_a^{\infty} f(x) dx = \infty &\Rightarrow \int_a^{\infty} g(x) dx = \infty. \end{aligned}$$

Dim. Senza perdere di generalità si può supporre $\bar{x} = a$. Per la monotonia dell'integrale di Riemann, si ha per ogni $M \geq a$:

$$\int_a^M f(x) dx \leq \int_a^M g(x) dx.$$

Le affermazioni a) e b) seguono passando al limite per $M \rightarrow \infty$.

TEOREMA 1.4 (Criterio del confronto asintotico). Siano $f, g : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, due funzioni Riemann-integrabili su ogni intervallo $[a, M]$, $M \geq a$. Supponiamo che risulti $g(x) > 0$ per ogni $x \geq a$ e che esista finito e diverso da zero il limite

$$L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} \neq 0.$$

Allora:

$$\int_a^{\infty} f(x) dx \text{ converge se e solo se } \int_a^{\infty} g(x) dx \text{ converge.}$$

Dim. Supponiamo ad esempio $0 < L < \infty$. Allora, per il Teorema della permanenza del segno esiste $\bar{x} \geq a$ tale che per ogni $x \geq \bar{x}$ si ha

$$\frac{L}{2} \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq 2L.$$

Siccome $g > 0$, si può riordinare la disuguaglianza ottenendo $\frac{L}{2}g(x) \leq f(x) \leq 2Lg(x)$ per ogni $x \geq \bar{x}$. La tesi segue dal Teorema del confronto.

ESEMPIO 1.5. Studiamo la convergenza dell'integrale improprio

$$I_{\alpha} = \int_1^{\infty} \frac{x^{\alpha+1}}{x+1} \log \left(1 + \frac{1}{x} \right) dx$$

al variare del parametro reale $\alpha \in \mathbb{R}$. Ricordiamo lo sviluppo infinitesimale del logaritmo

$$\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

per $x \rightarrow \infty$, dove $o(1/x)$ è un errore che converge a zero più velocemente di $1/x$ quando $x \rightarrow \infty$. Allora la funzione integranda è

$$f(x) = \frac{x^\alpha}{1 + 1/x} \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^{1-\alpha}}(1 + o(1)).$$

Scelta la funzione di confronto $g(x) = \frac{1}{x^{1-\alpha}}$, risulta $g(x) > 0$ per $x > 0$ e inoltre

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \neq 0.$$

Siccome l'integrale

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^{1-\alpha}} dx$$

converge se e solo se $\alpha < 0$, l'integrale in esame pure converge se e solo se $\alpha < 0$. Ad esempio, nel caso $\alpha = -2$ con un conto lasciato come esercizio si può calcolare esplicitamente

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2 + x} \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx = \frac{1}{2} \log^2 2.$$

2. Convergenza assoluta

DEFINIZIONE 2.1. Siano $a \in \mathbb{R}$ ed $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che la restrizione $f: [a, M] \rightarrow \mathbb{R}$ sia (limitata e) Riemann-integrabile per ogni $a \leq M < \infty$. Diciamo che f è *assolutamente integrabile su* $[a, \infty)$ se converge l'integrale improprio

$$\int_a^\infty |f(x)| dx < \infty.$$

In questo caso, diciamo che l'integrale improprio $\int_a^\infty f(x) dx$ converge *assolutamente*.

TEOREMA 2.2. Sia $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione (limitata e) Riemann-integrabile su ogni intervallo della forma $[a, M]$, $M \geq a$. Se f è assolutamente integrabile su $[a, \infty)$ allora è integrabile in senso improprio su $[a, \infty)$ e inoltre

$$(2.2) \quad \left| \int_a^\infty f(x) dx \right| \leq \int_a^\infty |f(x)| dx.$$

Dim. Definiamo le funzioni $f^+, f^-: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \quad \text{e} \quad f^-(x) = \min\{f(x), 0\}, \quad x \geq a.$$

Chiaramente $f(x) = f^+(x) + f^-(x)$ e $|f(x)| = f^+(x) - f^-(x)$ per ogni $x \geq a$. È noto, inoltre, che le funzioni f^+, f^- sono Riemann-integrabili su ogni intervallo $[a, M]$. Per il Teorema del confronto gli integrali impropri

$$\int_a^\infty f^+(x) dx \quad \text{e} \quad \int_a^\infty f^-(x) dx$$

convergono. Passando al limite per $M \rightarrow \infty$ nell'identità

$$\int_a^M f(x)dx = \int_a^M (f^+(x) + f^-(x))dx = \int_a^M f^+(x)dx + \int_a^M f^-(x)dx$$

si ottiene la convergenza dell'integrale improprio di f su $[a, \infty)$. Passando al limite nella disuguaglianza

$$\begin{aligned} \left| \int_a^M f(x)dx \right| &= \left| \int_a^M f^+(x)dx + \int_a^M f^-(x)dx \right| \\ &\leq \int_a^M |f^+(x)|dx + \int_a^M |f^-(x)|dx = \int_a^M |f(x)|dx \end{aligned}$$

si ottiene la (2.2).

ESEMPIO 2.3. L'integrale improprio $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ non converge assolutamente, ovvero

$$\int_0^\infty \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \infty.$$

Infatti, sul generico intervallo $[k\pi + \pi/4, k\pi + 3\pi/4]$, $k = 0, 1, 2, \dots$, risulta

$$|\sin x| \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad \frac{1}{x} \geq \frac{1}{k\pi + 3\pi/4},$$

e dunque

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \geq \frac{\sqrt{2}\pi}{8(k\pi + 3\pi/4)}.$$

Si deduce che

$$\int_0^\infty \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \geq \frac{\sqrt{2}\pi}{8} \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k\pi + 3\pi/4} = \infty.$$

3. Integrali oscillatori

Tipici esempi di integrali oscillatori sono

$$\int_0^\infty f(x) \sin x dx, \quad \int_0^\infty f(x) \cos x dx,$$

ovvero l'integrale a valori complessi

$$\int_0^\infty f(x) e^{ix} dx = \int_0^\infty f(x) \cos x dx + i \int_0^\infty f(x) \sin x dx,$$

dove $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione non negativa, $f \geq 0$.

Il seguente teorema fornisce condizioni sufficienti per la convergenza di integrali di questo tipo.

TEOREMA 3.1 (Criterio per integrali oscillatori). Siano $f \in C([a, \infty))$ e $g \in C^1([a, \infty))$, $a \in \mathbb{R}$, due funzioni con le seguenti proprietà:

- i) $f = F'$ con primitiva $F \in C^1([a, \infty))$ limitata;
- ii) $g' \leq 0$ e $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$.

Allora l'integrale improprio

$$\int_a^\infty f(x)g(x)dx$$

converge.

Dim. Per ogni $M > a$ si ottiene con un'integrazione per parti:

$$\begin{aligned} \int_a^M f(x)g(x)dx &= [F(x)g(x)]_{x=a}^{x=M} - \int_a^M F(x)g'(x)dx \\ &= F(M)g(M) - F(a)g(a) - \int_a^M F(x)g'(x)dx. \end{aligned}$$

Siccome F è limitata e g è infinitesima per $M \rightarrow \infty$, si ha

$$\lim_{M \rightarrow \infty} F(M)g(M) = 0.$$

D'altra parte, siccome $g' \leq 0$ si trova

$$\begin{aligned} \int_a^M |F(x)g'(x)|dx &\leq \sup_{x \in [a, \infty)} |F(x)| \int_a^M |g'(x)|dx = - \sup_{x \in [a, \infty)} |F(x)| \int_a^M g'(x)dx \\ &= (g(a) - g(M)) \sup_{x \in [a, \infty)} |F(x)|, \end{aligned}$$

e dunque, usando nuovamente il fatto che g è infinitesima

$$\int_a^\infty |F(x)g'(x)|dx \leq g(a) \sup_{x \in [a, \infty)} |F(x)| < \infty.$$

Dal momento che la funzione Fg' è assolutamente integrabile su $[a, \infty)$, per il Criterio della convergenza assoluta esiste finito anche il limite

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_a^M F(x)g'(x)dx.$$

Questo termina la prova del teorema.

ESEMPIO 3.2. Usando il Teorema 3.1 sugli integrali oscillatori, si vede che per ogni scelta del parametro $\alpha > 0$ l'integrale improprio

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$$

converge. Infatti, la funzione $f(x) = \sin x$ ha primitiva limitata $F(x) = -\cos x$ e la funzione $g(x) = 1/x^\alpha$ ha derivata negativa per $x > 0$ ed è infinitesima per $x \rightarrow \infty$.

4. Integrali impropri di funzioni non limitate

DEFINIZIONE 4.1. Sia $f: (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $-\infty < a < b < \infty$, una funzione (limitata e) Riemann-integrabile su ogni intervallo della forma $[a + \varepsilon, b]$ con $0 < \varepsilon < b - a$. Diciamo che f è *integrabile in senso improprio su $(a, b]$* se esiste finito il limite

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

In questo caso, diciamo che l'integrale improprio di f su $(a, b]$ converge e poniamo

$$\int_a^b f(x)dx = I.$$

Lo studio degli integrali impropri di funzioni come nella definizione precedente si può ricondurre allo studio di integrali impropri su intervallo illimitato tramite il cambiamento di variabile $y = \frac{b-a}{x-a}$ che porta alla trasformazione formale di integrali

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a) \int_1^\infty f\left(a + \frac{b-a}{y}\right) \frac{dy}{y^2}.$$

ESEMPIO 4.2. Con una discussione analoga a quella svolta nell'Esempio 1.2 si deduce che, al variare del parametro reale $\alpha > 0$, l'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$$

converge se e solo se $\alpha < 1$.

Enunciamo, senza dimostrazione, un Teorema del confronto asintotico per integrali di funzioni non limitate.

TEOREMA 4.3 (Criterio del confronto asintotico). Siano $f, g : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $-\infty < a < b < \infty$, due funzioni (limitate e) Riemann-integrabili su ogni intervallo della forma $[a + \varepsilon, b]$, $0 < \varepsilon < b - a$. Supponiamo che:

- i) $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \infty$;
- ii) il seguente limite esiste finito e diverso da zero

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} \neq 0.$$

Allora:

$$\int_a^b f(x)dx \text{ converge} \Leftrightarrow \int_a^b g(x)dx \text{ converge}.$$

5. Esercizi

ESERCIZIO 1. Al variare del parametro $\alpha \geq 0$, studiare la convergenza e la convergenza assoluta dell'integrale improprio

$$\int_1^\infty \frac{\sin x \log x}{x^\alpha} dx.$$

Questo esercizio è stato risolto in classe. La risposta è la seguente: per $\alpha > 1$ si ha convergenza assoluta (e quindi anche semplice); per $0 < \alpha \leq 1$ non si ha convergenza assoluta ma c'è convergenza semplice; per $\alpha = 0$ non c'è convergenza semplice.

ESERCIZIO 2. Calcolare i seguenti integrali impropri

$$1) \int_0^\infty \frac{\log x}{(x+1)^2} dx; \quad 2) \int_0^\infty x^{-2} e^{-\frac{1}{x}} dx; \quad 3) \int_0^\infty e^{-\beta x} \cos(\alpha x) dx, \quad \beta > 0, \alpha \in \mathbb{R}.$$

ESERCIZIO 3. Stabilire se convergono i seguenti integrali impropri

$$1) \int_0^{\infty} \sin^2 x \, dx; \quad 2) \int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{1 - \sin(x)}} \, dx; \quad 3) \int_0^1 \frac{\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt{1-x^2}} \, dx.$$

ESERCIZIO 4. Stabilire se convergono assolutamente i seguenti integrali impropri

$$1) \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{1+x^2} \, dx; \quad 2) \int_0^{\infty} x^2 e^{-\sqrt{x}} \cos x \, dx; \quad 3) \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x} - \tan \frac{1}{x} \right) \sin x \, dx.$$

ESERCIZIO 5. Calcolare tutti gli $\alpha > 0$ tali che converga ciascuno dei seguenti integrali impropri

$$1) \int_0^1 \frac{(1 - \cos x)^\alpha}{\tan x - x} \, dx; \quad 2) \int_0^1 \frac{\sin(x^\alpha)}{\log(1+x)} \, dx;$$

$$3) \int_0^{\infty} \frac{\arctan \sqrt{x} - \pi/2}{x^\alpha} \, dx; \quad 4) \int_2^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\log^\alpha x} \, dx.$$

ESERCIZIO 6. Studiare la convergenza dei seguenti integrali oscillatori

$$1) \int_2^{\infty} \frac{\sin x}{\log x} \, dx; \quad 2) \int_1^{\infty} \sin x \arcsin \frac{1}{x} \, dx; \quad 3) \int_0^{\infty} x \sin(x^4) \, dx.$$

ESERCIZIO 7. i) Determinare tutti i parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che il seguente integrale improprio converga

$$\int_0^{\infty} \frac{1+x^\beta}{x^\alpha(1+x^2)} \, dx.$$

ii) Rappresentare i parametri ammissibili nel piano cartesiano $\alpha\beta$.

Introduzione alle equazioni differenziali ordinarie

1. Equazioni differenziali lineari del primo ordine

Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto e siano $a, b \in C(I)$ due funzioni continue. Un'equazione differenziale della forma

$$(1.3) \quad y' + a(x)y = b(x), \quad x \in I,$$

si dice equazione lineare del primo ordine. Fissati $x_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}$, possiamo prescrivere il valore della soluzione nel punto x_0 :

$$(1.4) \quad y(x_0) = y_0.$$

Il problema di risolvere l'equazione differenziale (1.3) con la *condizione iniziale* (1.4) si chiama *Problema di Cauchy*. L'incognita del problema è una funzione $y \in C^1(I)$.

Dedurremo la formula risolutiva dell'equazione differenziale, e più in generale del Problema di Cauchy, con un argomento euristico. Consideriamo preliminarmente il caso $b = 0$:

$$(1.5) \quad y' + a(x)y = 0, \quad x \in I.$$

In questo caso, l'equazione differenziale si dice *omogenea*. Supponendo $y \neq 0$, ad esempio $y > 0$, l'equazione differenziale (1.5) si può riscrivere nella forma $y'/y = -a(x)$. Una primitiva della funzione y'/y è $\log y$. Dunque, indicando con A una primitiva di a , ovvero $A'(x) = a(x)$ per ogni $x \in I$, abbiamo

$$-A = \log y + d,$$

per qualche costante $d \in \mathbb{R}$. Segue che $y = \exp(-d - A)$ e ponendo $c = e^{-d}$ troviamo la soluzione

$$(1.6) \quad y(x) = ce^{-A(x)}, \quad x \in I.$$

Questa funzione risolve l'equazione omogenea per ogni $c \in \mathbb{R}$ (in altri termini la limitazione $y > 0$ può essere lasciata cadere).

Ora cerchiamo una soluzione della forma (1.6) per l'equazione non omogenea (1.3), dove ora $c \in C^1(I)$ è una funzione incognita che deve essere determinata. Questo metodo si chiama "variazione della costante". Inserendo $y' = c'e^{-A} - ace^{-A}$ nell'equazione (1.3) otteniamo

$$c'e^{-A} = b, \quad \text{ovvero} \quad c' = be^A.$$

Integrando tale equazione su un intervallo $(x_0, x) \subset I$ otteniamo

$$c(x) = c(x_0) + \int_{x_0}^x b(t)e^{A(t)} dt,$$

e dunque troviamo

$$(1.7) \quad y(x) = \left(c(x_0) + \int_{x_0}^x b(t)e^{A(t)} dt \right) e^{-A(x)}, \quad x \in I,$$

dove $c(x_0) \in \mathbb{R}$ è un numero reale. Per ogni scelta di tale numero, la funzione (1.8) verifica l'equazione differenziale (1.3).

Il numero $c(x_0)$ si può determinare imponendo che l'integrale generale y verifichi la condizione iniziale $y(x_0) = y_0$. Si ottiene $c(x_0) = y_0 e^{A(x_0)}$. Dunque otteniamo la *formula di rappresentazione* per la soluzione del Problema di Cauchy:

$$(1.8) \quad y(x) = \left(y_0 e^{A(x_0)} + \int_{x_0}^x b(t)e^{A(t)} dt \right) e^{-A(x)}, \quad x \in I,$$

Nel prossimo teorema proviamo che il metodo seguito rileva in effetti l'*unica* soluzione del problema di Cauchy.

TEOREMA 1.1. Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto, $x_0 \in I$, $a, b \in C(I)$ e $y_0 \in \mathbb{R}$. Allora la funzione (1.8) risolve in modo unico il Problema di Cauchy (1.3)+(1.4).

Dim. Che la funzione (1.8) risolva il problema è un conto che ripercorre a ritroso l'argomento euristico. Proviamo che questa soluzione è l'unica.

Sia $z \in C^1(I)$ una soluzione dell'equazione differenziale (1.3) e consideriamo la funzione ausiliaria

$$w(x) = e^{A(x)} z(x) - \int_{x_0}^x b(t)e^{A(t)} dt,$$

dove A è una primitiva di a . Dal momento che sull'intervallo I risulta

$$w' = (az + z')e^A - be^A = 0,$$

per il Teorema di Lagrange la funzione w è costante su I , ovvero esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che $w(x) = k \in \mathbb{R}$ per ogni $x \in I$. Dunque, si ha

$$z(x) = \left(k + \int_{x_0}^x b(t)e^{A(t)} dt \right) e^{-A(x)}.$$

D'altra parte, se z risolve anche la condizione iniziale $z(x_0) = y_0$ deve essere $k = y_0 e^{A(x_0)}$ e quindi z coincide con la funzione in (1.8).

2. Equazione differenziali a variabili separabili

Siano $I, J \subset \mathbb{R}$ due intervalli aperti e siano $f \in C(I)$ e $g \in C(J)$ due funzioni continue. Cerchiamo le soluzioni dell'equazione differenziale del primo ordine

$$(2.9) \quad y' = f(x)g(y), \quad x \in I,$$

per qualche intervallo $I_1 \subset I$. Una simile equazione si dice *a variabili separabili*. Eventualmente, fissati un punto $x_0 \in I$ e un valore $y_0 \in J$ possiamo prescrivere la condizione iniziale

$$(2.10) \quad y(x_0) = y_0.$$

Il problema (2.9)+(2.10) si chiama *Problema di Cauchy*.

Osserviamo preliminarmente che se $g(y_0) = 0$ allora la funzione costante $y(x) = y_0$, $x \in I$, è certamente una soluzione dell'equazione differenziale (2.9) che verifica la condizione iniziale.

Siccome vogliamo dividere per g , supponiamo che $g(y_0) \neq 0$. Allora risulta $g \neq 0$ in un intervallo aperto $J_1 \subset J$ che contiene y_0 . Possiamo allora dividere e separare le variabili. L'equazione differenziale si riscrive nel seguente modo:

$$(2.11) \quad \frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x),$$

dove x varia in un intorno $I_1 \subset I$ del punto x_0 tale che $y(x) \in J_1$ per ogni $x \in I_1$.

Sia $G \in C^1(J_1)$ una primitiva di $1/g(y)$ (nella variabile y), definita nell'intervallo J_1 e dove risulta $g \neq 0$. La funzione G è strettamente monotona, perchè $G'(y) \neq 0$, e pertanto G è invertibile.

Sia poi $F \in C^1(I)$ una primitiva di f . Integrando l'equazione differenziale (2.11) si ottiene

$$(2.12) \quad G(y(x)) = F(x) + C, \quad x \in I_1.$$

Qui, $C \in \mathbb{R}$ è una costante che può essere determinata tramite la condizione iniziale, e precisamente $C = G(y_0) - F(x_0)$.

La soluzione del Problema di Cauchy è dunque

$$(2.13) \quad y(x) = G^{-1}(F(x) - F(x_0) + G(y_0)), \quad x \in I_1,$$

dove $G^{-1} : G(J_1) \rightarrow J_1$ è la funzione inversa di G . L'intervallo $I_1 \subset I$ è in generale più piccolo di I .

Il precedente argomento rileva due tipi di soluzione dell'equazione differenziale (2.9): le soluzioni costanti e le soluzioni per cui $g(y) \neq 0$. Potrebbero, tuttavia, esserci altre soluzioni. Se $g \neq 0$ su J , l'argomento prova che la soluzione è necessariamente della forma (2.13).

TEOREMA 2.1. Siano $I, J \subset \mathbb{R}$ due intervalli aperti, $x_0 \in I$ e $y_0 \in J$, e siano $f \in C(I)$, $g \in C(J)$ tali che $g \neq 0$ su J . Allora il Problema di Cauchy (2.9)+(2.10) ha una soluzione unica $y \in C^1(I_1)$ data dalla formula (2.13), per qualche intervallo aperto $I_1 \subset I$ contenente x_0 .

La dimostrazione del teorema è contenuta nell'argomento precedente.

3. Equazioni differenziali lineari del secondo ordine

Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto e siano $a, b, f \in C(I)$ funzioni continue. In questa sezione studiamo l'equazione differenziale lineare del secondo ordine:

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x), \quad x \in I.$$

L'incognita è una funzione $y \in C^2(I)$. L'equazione differenziale si dice lineare perchè l'operatore differenziale $\mathcal{L} : C^2(I) \rightarrow C(I)$

$$\mathcal{L}(y) = y'' + a(x)y' + b(x)y$$

è un operatore lineare.

Il seguente teorema di esistenza e unicità della soluzione per il relativo problema di Cauchy è il corollario di un teorema più generale che sarà visto e provato nel corso di Analisi 3.

TEOREMA 3.1. Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto, $x_0 \in I$ e $y_0, y'_0 \in \mathbb{R}$, e siano $a, b, f \in C(I)$ funzioni continue. Allora il Problema di Cauchy

$$(3.14) \quad \begin{cases} y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x), & x \in I, \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases}$$

ha un'unica soluzione $y \in C^2(I)$.

Studiamo ora il caso omogeneo $f = 0$. Consideriamo l'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea

$$S = \{y \in C^2(I) : y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \text{ su } I\}.$$

Dal teorema precedente segue il seguente fatto.

PROPOSIZIONE 3.2. L'insieme S delle soluzioni dell'equazione omogenea è uno spazio vettoriale reale di dimensione 2.

Dim. S è uno spazio vettoriale, perchè per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $y_1, y_2 \in S$, ovvero $\mathcal{L}(y_1) = \mathcal{L}(y_2) = 0$, risulta

$$\mathcal{L}(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha \mathcal{L}(y_1) + \beta \mathcal{L}(y_2) = 0,$$

e quindi $\alpha y_1 + \beta y_2 \in S$.

Proviamo che S ha dimensione esattamente 2. Fissato un punto $x_0 \in I$, definiamo la trasformazione $T : S \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita nel seguente modo

$$T(y) = (y(x_0), y'(x_0)).$$

La trasformazione T è lineare. Proviamo che T è iniettiva e suriettiva. Ne segue che S ed \mathbb{R}^2 sono linearmente isomorfi e dunque $\dim(S) = \dim(\mathbb{R}^2) = 2$.

Prova dell'iniettività: se $T(y) = T(z)$ con $y, z \in S$ allora y e z risolvono lo stesso Problema di Cauchy (3.14) (con $f = 0$). Siccome per il Teorema 3.1 la soluzione del problema è unica, deve essere $y = z$.

Prova della suriettività: dato $(y_0, y'_0) \in \mathbb{R}^2$, dal Teorema 3.1 segue l'esistenza di $y \in S$ tale che $T(y) = (y_0, y'_0)$.

Dunque, lo spazio vettoriale S ha una base vettoriale composta da due soluzioni. Consideriamo due soluzioni $y_1, y_2 \in S$ (non necessariamente linearmente indipendenti). Formiamo la *matrice Wronskiana*

$$W_{y_1, y_2}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix},$$

e il *determinante Wronskiano*

$$w(x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x).$$

Chiaramente risulta $w \in C^1(I)$ e inoltre

$$\begin{aligned} w' &= y_1'y_2' - y_2'y_1' + y_1y_2'' - y_2y_1'' \\ &= y_1(-a(x)y_2' - b(x)y_2) - y_2(-a(x)y_1' - b(x)y_1) \\ &= -a(x)w. \end{aligned}$$

Integrando l'equazione differenziale scopriamo che il determinante Wronskiano ha la forma

$$w(x) = w(x_0) \exp\left(-\int_{x_0}^x a(t)dt\right), \quad x \in I.$$

In particolare, se $w(x_0) = 0$ in un punto $x_0 \in I$ allora $w = 0$ in tutti i punti.

PROPOSIZIONE 3.3. Siano $y_1, y_2 \in S$ soluzioni dell'equazione omogenea e sia $w = \det W_{y_1, y_2}$ il corrispondente determinante Wronskiano. Allora:

- (A) y_1, y_2 sono linearmente dipendenti se e solo se esiste $x_0 \in I$ tale che $w(x_0) = 0$ (equivalentemente se e solo se $w = 0$ su I);
- (B) y_1, y_2 sono linearmente indipendenti se e solo se esiste $x_1 \in I$ tale che $w(x_1) \neq 0$ (equivalentemente se e solo se $w \neq 0$ su I).

Dim. Proviamo (A). Se y_1, y_2 sono linearmente dipendenti allora esistono $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tali che $\alpha y_1 + \beta y_2 = 0$ su I . Derivando vale anche $\alpha y_1' + \beta y_2' = 0$ su I , e dunque

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Segue che $w = 0$ su tutto I .

Supponiamo ora che $w(x_0) = 0$ in un punto $x_0 \in I$. Allora, esistono $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ tali che

$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La funzione $z = \alpha y_1 + \beta y_2$ è in S e verifica $z(x_0) = 0$ e $z'(x_0) = 0$. Dall'unicità della soluzione per il Problema di Cauchy segue che $z = 0$ e quindi y_1, y_2 sono linearmente dipendenti.

L'affermazione (B) segue da (A) per negazione.

4. Metodo della variazione delle costanti

In questa sezione illustriamo il metodo per calcolare una soluzione dell'equazione non omogenea

$$(4.15) \quad y'' + a(x)y + b(x)y = f(x), \quad x \in I,$$

una volta si sappia risolvere l'equazione omogenea corrispondente. Sia y_1, y_2 una base di soluzioni per l'equazione omogenea $y'' + a(x)y + b(x)y = 0$. Cerchiamo una soluzione del tipo

$$(4.16) \quad y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

dove $c_1, c_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni da determinare. Derivando la relazione si ottiene

$$y' = c_1' y_1 + c_1 y_1' + c_2' y_2 + c_2 y_2'.$$

Imponendo la condizione

$$(4.17) \quad c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0$$

l'espressione precedente si riduce alla seguente

$$y' = c_1 y_1' + c_2 y_2'.$$

Derivando nuovamente si ottiene

$$y'' = c'_1 y'_1 + c_1 y''_1 + c'_2 y'_2 + c_2 y''_2.$$

Sostituendo nell'equazione differenziale di partenza, dopo qualche calcolo, si arriva alla seguente equazione

$$c_1(y''_1 + ay'_1 + by_1) + c_2(y''_2 + ay'_2 + by_2) + c'_1 y'_1 + c'_2 y'_2 = f.$$

Usando il fatto che y_1, y_2 risolvono l'equazione omogenea si ottiene la seconda condizione

$$(4.18) \quad c'_1 y'_1 + c'_2 y'_2 = f.$$

Mettendo a sistema le condizioni (4.17) e (4.18) si arriva al sistema

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c'_1 \\ c'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}.$$

Nel sistema è apparsa la matrice Wronskiana di y_1, y_2 . Per la Proposizione 3.3, questa matrice è invertibile in ogni punto $x \in I$. Questo permette di risolvere il sistema in c'_1 e c'_2 :

$$\begin{pmatrix} c'_1 \\ c'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}.$$

Le due equazioni del sistema possono essere integrate. Questo procedimento determina c_1 e c_2 a meno di due costanti additive che appaiono nel processo di integrazione. Una volta sostituite c_1 e c_2 nella (4.16), le due costanti possono essere determinate con delle eventuali condizioni iniziali.

5. Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti

Consideriamo un'equazione differenziale del tipo

$$(5.19) \quad y'' + ay' + by = 0$$

dove ora $a, b \in \mathbb{R}$ sono costanti. Si cercano soluzioni della forma $y(x) = e^{\lambda x}$, dove $\lambda \in \mathbb{C}$ è un parametro complesso. Sostituendo le derivate $y' = \lambda e^{\lambda x}$ e $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$ nell'equazione differenziale si ottiene l'equazione

$$e^{\lambda x}(\lambda^2 + a\lambda + b) = 0.$$

Siccome $e^{\lambda x} \neq 0$, tale equazione è verificata se e solo se λ verifica l'*equazione caratteristica*:

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0.$$

Sia $\Delta = a^2 - 4b$ il discriminante dell'equazione. Si possono presentare tre casi.

1) $\Delta > 0$. L'equazione caratteristica ha due soluzioni reali distinte

$$\lambda_1 = \frac{-a - \sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{-a + \sqrt{\Delta}}{2}.$$

In questo caso, la soluzione generale y di (5.19) è una combinazione lineare delle soluzioni $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ e $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$, che sono linearmente indipendenti:

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

dove $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

2) $\Delta < 0$. L'equazione caratteristica ha due soluzioni complesse coniugate

$$\lambda_1 = \frac{-a + i\sqrt{-\Delta}}{2} = \alpha + i\beta \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{-a - i\sqrt{-\Delta}}{2} = \alpha - i\beta$$

dove si è posto $\alpha = -a/2$ e $\beta = \sqrt{-\Delta}/2$. Le funzioni

$$z_1(x) = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x)$$

$$z_2(x) = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{-i\beta x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x)$$

sono soluzioni a valori complessi dell'equazione differenziale. Dunque, le funzioni

$$y_1(x) = \frac{z_1(x) + z_2(x)}{2} = e^{\alpha x} \cos \beta x$$

$$y_2(x) = \frac{z_1(x) - z_2(x)}{2i} = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

sono soluzioni a valori reali dell'equazione differenziale. Le funzioni y_1 e y_2 sono linearmente indipendenti e dunque la soluzione generale dell'equazione differenziale è della forma

$$y(x) = (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x) e^{\alpha x}$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

3) $\Delta = 0$. L'equazione caratteristica ha la soluzione reale $\lambda = -a/2$ con molteplicità 2. In questo caso, il metodo produce una sola soluzione $y_1(x) = e^{\lambda x}$. Un conto diretto mostra che la funzione $y_2(x) = x e^{\lambda x}$ è pure una soluzione che è linearmente indipendente dalla precedente. In effetti, si ha:

$$\begin{aligned} y_2'' + a y_2' + b y_2 &= 2\lambda e^{\lambda x} + \lambda^2 x e^{\lambda x} + a(e^{\lambda x} + \lambda x e^{\lambda x}) + b x e^{\lambda x} \\ &= (\lambda^2 + a\lambda + b)x e^{\lambda x} + (2\lambda + a)e^{\lambda x} = 0, \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio si è usato il fatto che λ risolve l'equazione caratteristica e che $\lambda = -a/2$.

La soluzione generale dell'equazione (5.19) è dunque

$$y(x) = (c_1 + c_2 x) e^{\lambda x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

6. Esercizi svolti

ESERCIZIO 8. Cerchiamo la soluzione del Problema di Cauchy seguente

$$(6.20) \quad \begin{cases} y' = \frac{1+2x}{\cos y} \\ y(0) = \pi. \end{cases}$$

L'equazione differenziale è a variabili separabili $y' = f(x)g(y)$ con $f(x) = 1 + 2x$ e $g(y) = 1/\cos y$. In particolare, g è definita per $\cos y \neq 0$, ovvero per $y \neq \pi/2 + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Siccome vogliamo che g sia definita su un intervallo, tenuto conto della condizione iniziale dovremo considerare $g : (\pi/2, 3\pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$. Chiaramente $g \neq 0$.

Separando le variabili otteniamo $y' \cos y = 1 + 2x$, e integrando troviamo la soluzione generale in forma implicita dell'equazione differenziale

$$\sin y = x + x^2 + C,$$

dove $C \in \mathbb{R}$ è una costante che si determina con la condizione iniziale $y(0) = \pi$, ovvero $C = \sin y(0) = 0$.

Ora dobbiamo invertire la relazione $\sin y = x + x^2$. Osserviamo che l'inversione "meccanica"

$$z(x) = \arcsin(x + x^2)$$

non fornisce la soluzione del problema (6.20) perchè $z(0) = \arcsin(0) = 0$ e la condizione iniziale non è verificata.

Per determinare la soluzione corretta osserviamo che la funzione \arcsin è l'inversa della funzione \sin ristretta all'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$. Nel nostro caso, tuttavia, y prende valori in un intorno di π . Allora procediamo in questo modo. Ponendo $w(x) = y(x) - \pi$, abbiamo $w(0) = y(0) - \pi = 0$ e $\sin w = \sin(y - \pi) = -\sin y = -(x + x^2)$. Siccome w assume valori in un intorno di 0, è ora lecito invertire la funzione seno e otteniamo $w = -\arcsin(x + x^2)$ e quindi

$$y(x) = \pi - \arcsin(x + x^2).$$

Questa è la soluzione del problema, che è definita nell'intervallo aperto

$$I_1 = \{x \in \mathbb{R} : x + x^2 < 1\}.$$

ESERCIZIO 9. Calcolare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' - y = \frac{e^x}{e^x + 1}.$$

L'equazione caratteristica è $\lambda^2 - 1 = 0$ le cui soluzioni sono $\lambda = \pm 1$. La soluzione generale dell'equazione omogenea è quindi $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$. Calcoliamo la soluzione generale dell'equazione non omogenea con il metodo della variazione delle costanti. Cerchiamo una soluzione della forma

$$y = c_1(x)e^x + c_2(x)e^{-x},$$

con c_1, c_2 funzioni da determinare. Derivando si ottiene $y' = c_1' e^x + c_1 e^x + c_2' e^{-x} - c_2 e^{-x}$ e imponendo la prima condizione

$$c_1' e^x + c_2' e^{-x} = 0$$

si ha $y' = c_1 e^x - c_2 e^{-x}$ e quindi $y'' = c_1' e^x + c_1 e^x - c_2' e^{-x} + c_2 e^{-x}$. Sostituendo nell'equazione di partenza si trova

$$e^x(c_1 + c_1') + e^{-x}(c_2 - c_2') - c_1 e^x - c_2 e^{-x} = \frac{e^x}{1 + e^x},$$

e quindi si ottiene la seconda condizione

$$e^x c_1' - c_2' e^{-x} = \frac{e^x}{1 + e^x}.$$

Risolviamo il sistema delle due condizioni

$$\begin{cases} c_1' e^x + c_2' e^{-x} = 0 \\ c_1' e^x - c_2' e^{-x} = \frac{e^x}{1 + e^x}. \end{cases}$$

Sommando e sottraendo le due equazioni si ottiene

$$\begin{cases} c_1' = \frac{1}{2} \frac{1}{1+e^x} \\ c_2' = -\frac{1}{2} \frac{e^{2x}}{1+e^x}. \end{cases}$$

Per determinare c_1 calcoliamo l'integrale indefinito

$$c_1(x) = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1+e^x}$$

mediante la sostituzione $t = e^x$. Si ottiene

$$c_1(x) = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t(1+t)} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \frac{1}{2} \log \frac{e^x}{1+e^x} + k_1,$$

dove $k_1 \in \mathbb{R}$ è una costante additiva. Per determinare $c_2(x)$ calcoliamo l'integrale

$$c_2(x) = \frac{1}{2} \int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx$$

con la stessa sostituzione. Si ottiene

$$c_2(x) = -\frac{1}{2} e^x + \frac{1}{2} \log(1+e^x) + k_2,$$

con $k_2 \in \mathbb{R}$. In conclusione, si ottiene la soluzione generale

$$y(x) = \left(\frac{1}{2} \log \frac{e^x}{1+e^x} + k_1 \right) e^x + \left(-\frac{1}{2} e^x + \frac{1}{2} \log(1+e^x) + k_2 \right) e^{-x},$$

dove $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ sono due costanti libere.

ESERCIZIO 10. Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ studiare esistenza e unicità della soluzione $y \in C^1(\mathbb{R})$ del problema

$$\begin{cases} x^3 y' - y + 1 = 0, \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

L'equazione differenziale è lineare del primo ordine. Tuttavia il coefficiente di y' si annulla nel punto $x = 0$, proprio dove è assegnato il dato iniziale.

Calcoliamo tutte le soluzioni dell'equazione dove $x \neq 0$. L'equazione omogenea $x^3 y' = y$ ha le soluzioni

$$y(x) = ce^{-\frac{1}{2x^2}}.$$

Cerchiamo una soluzione dell'equazione non omogenea della stessa forma, con $c = c(x)$ funzione da determinare. Derivando y e sostituendo nell'equazione si arriva all'identità

$$c'(x) = -\frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{2x^2}}.$$

Ora integriamo questa identità un un intervallo (x_0, x) . La funzione che appare a destra non è integrabile in $x = 0$. Quindi l'intervallo di integrazione deve verificare $x, x_0 > 0$ oppure $x, x_0 < 0$. Integrando si ottiene

$$c(x) = c(x_0) - \int_{x_0}^x \frac{1}{t^3} e^{\frac{1}{2t^2}} dt = k_1 + e^{\frac{1}{2x^2}},$$

dove $k_1 \in \mathbb{R}$ è una costante. Siccome bisogna distinguere l'integrazione nel caso $x > 0$ e in quello $x < 0$, l'espressione generale per la funzione c è la seguente:

$$c(x) = \begin{cases} k_1 + e^{\frac{1}{2x^2}}, & x > 0, \\ k_2 + e^{\frac{1}{2x^2}}, & x < 0, \end{cases}$$

dove $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ sono due costanti indipendenti. Dunque, la soluzione generale dell'equazione differenziale è la seguente:

$$y(x) = \begin{cases} 1 + k_1 e^{-\frac{1}{2x^2}}, & x > 0, \\ 1 + k_2 e^{-\frac{1}{2x^2}}, & x < 0. \end{cases}$$

Dal momento che

$$\lim_{x \rightarrow 0} y(x) = 1$$

indipendentemente da k_1, k_2 , tutte le funzioni y si prolungano con continuità in $x = 0$ ponendo $y(0) = 1$. La funzione che ne risulta verifica in effetti $y \in C^1(\mathbb{R})$ con $y'(0) = 0$. La verifica di questo fatto è lasciata come esercizio.

Arriviamo alle seguenti conclusioni:

- 1) Per $\alpha \neq 1$ il problema non ha soluzioni.
- 2) Per $\alpha = 1$ il problema ha infinite soluzioni, che dipendono da due parametri reali.

7. Esercizi

ESERCIZIO 11. Calcolare la soluzione generale delle seguenti equazioni differenziali:

$$\text{i) } y' = \frac{y \cos x}{1 + \sin x} + \sin x; \quad \text{ii) } y' = \frac{3}{x}y + x^2 + 1, \quad x > 0.$$

ESERCIZIO 12. Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = (y^2 - y) \log(2 + x).$$

- i) Determinare il suo integrale generale.
- ii) Risolvere il problema di Cauchy con dato $y(-1) = 1/2$.

Soluzione:

$$y(x) = \frac{e^{x+1}}{e^{x+1} + (x+2)^{x+2}}, \quad x+2 > 0.$$

ESERCIZIO 13. Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = (y-1)(y-4) \frac{\cos x}{\sin x}.$$

- i) Trovare tutte le soluzioni costanti.
- ii) Calcolare la soluzione generale dell'equazione in forma implicita.
- iii) Calcolare in forma esplicita la soluzione del problema di Cauchy con dato iniziale $y(3\pi/2) = 5$.

ESERCIZIO 14. Calcolare la soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y = \frac{1}{\cos x}, & x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Soluzione: $y = \cos x \log(\cos x) + x \sin x$.

ESERCIZIO 15 (Difficile). Calcolare la soluzione $y \in C^1(a, b)$, $-\infty \leq a < 1 < b \leq \infty$, del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{y-x}{y+x}, \\ y(1) = 0, \end{cases}$$

e disegnare un grafico qualitativo di y . Calcolare b e mostrare che $a > -\frac{1}{2}e^{-\pi/2}$.

CAPITOLO 3

Curve in \mathbb{R}^n

Vedere il libro di testo, Capitolo 6 da p.311 a p.329

Spazi metrici e normati

1. Definizioni ed esempi

DEFINIZIONE 1.1 (Spazio metrico). Uno spazio metrico è una coppia (X, d) dove X è un insieme e $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ è una funzione, detta *metrica* o *distanza*, che per ogni $x, y, z \in X$ verifica le seguenti proprietà:

- 1) $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$;
- 2) $d(x, y) = d(y, x)$ (simmetria);
- 3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (disuguaglianza triangolare).

DEFINIZIONE 1.2 (Spazio normato). Uno spazio normato (reale) è una coppia $(V, \|\cdot\|)$ dove V è uno spazio vettoriale reale e $\|\cdot\| : V \rightarrow [0, \infty)$ è una funzione, detta *norma*, che per ogni $x, y \in V$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ verifica le seguenti proprietà:

- 1) $\|x\| \geq 0$ e $\|x\| = 0$ se e solo se $x = 0$;
- 2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (omogeneità);
- 3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (subaddittività o disuguaglianza triangolare).

Fissato un punto $x \in X$ ed un raggio $r \geq 0$, l'insieme

$$B_r(x) = B(x, r) = B_X(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

si dice *sfera* o *palla* (aperta) di centro x e raggio r . Nel seguito, useremo le palle per definire una *topologia* su uno spazio metrico.

Una norma $\|\cdot\|$ su uno spazio vettoriale V induce canonicamente una distanza d su V definita nel seguente modo:

$$d(x, y) = \|x - y\|, \quad x, y \in V.$$

La disuguaglianza triangolare per la distanza d deriva dalla subaddittività della norma $\|\cdot\|$. Infatti, per ogni $x, y, z \in V$ si ha:

$$d(x, y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y).$$

ESEMPIO 1.3 (Spazio metrico Euclideo). La funzione $|\cdot| : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$, $n \geq 1$, così definita

$$|x| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

è una norma su \mathbb{R}^n , detta *norma Euclidea*. Lo spazio metrico corrispondente (\mathbb{R}^n, d) , dove $d(x, y) = |x - y|$, si dice spazio (metrico) Euclideo. L'insieme

$$B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < r\}$$

è la palla Euclidea di raggio $r \geq 0$ centrata in $x \in \mathbb{R}^n$.

Con la notazione

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

per il *prodotto scalare standard* di \mathbb{R}^n , la norma Euclidea si esprime nel seguente modo: $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Il prodotto scalare è bi-lineare nelle due componenti, è simmetrico, ed è non degenere. Precisamente, per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ valgono le seguenti proprietà:

- 1) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$;
- 2) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$;
- 3) $\langle x, x \rangle = 0$ se e solo se $x = 0$.

Talvolta, il prodotto scalare si indica anche con il simbolo (x, y) .

La verifica delle proprietà 1) e 2) per la norma Euclidea è elementare. Per verificare la subadittività occorre la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

PROPOSIZIONE 1.4 (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz). Per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ vale la disuguaglianza

$$|\langle x, y \rangle| \leq |x||y|.$$

Dim. Il polinomio reale della variabile $t \in \mathbb{R}$:

$$P(t) = |x + ty|^2 = |x|^2 + 2t\langle x, y \rangle + t^2|y|^2$$

non è mai negativo, $P(t) \geq 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, e dunque il suo discriminante verifica $\Delta = 4\langle x, y \rangle^2 - 4|x|^2|y|^2 \leq 0$. La tesi segue. \square

Verifichiamo la subadittività della norma Euclidea. Dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si ha

$$|x + y|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = |x|^2 + 2\langle x, y \rangle + |y|^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2$$

ed estraendo le radici si ottiene la proprietà 3) di una norma.

ESEMPIO 1.5 (Norma della convergenza uniforme). Consideriamo l'insieme $V = C([0, 1]; \mathbb{R}^n)$ delle funzioni continue a valori in \mathbb{R}^n , $n \geq 1$, definite sull'intervallo $[0, 1] \subset \mathbb{R}$. Queste funzioni hanno n componenti $f = (f_1, \dots, f_n)$ e ciascuna componente è una funzione continua a valori reali. L'insieme V è uno spazio vettoriale reale. La funzione $\|\cdot\|_\infty : V \rightarrow [0, \infty)$

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| = \max_{x \in [0, 1]} |f(x)|$$

è una norma, detta *norma della convergenza uniforme* o *norma del sup*. Nella definizione, $|f(x)|$ è la norma Euclidea di $f(x) \in \mathbb{R}^n$. L'estremo superiore è un massimo per il Teorema di Weierstrass. Verifichiamo ad esempio la disuguaglianza triangolare per $f, g \in V$:

$$\begin{aligned} \|f + g\|_\infty &= \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) + g(x)| \leq \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| + |g(x)| \\ &\leq \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| + \sup_{x \in [0, 1]} |g(x)| = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty. \end{aligned}$$

Nel caso $n = 1$, dati $f \in C([0, 1])$ ed $r \geq 0$, la palla

$$B_r(f) = \{g \in C([0, 1]) : |f(x) - g(x)| < r \text{ per ogni } x \in [0, 1]\}$$

è l'insieme delle funzioni continue g il cui grafico è contenuto nella striscia di spessore $2r$ attorno al grafico di f .

ESEMPIO 1.6 (Norma integrale). Consideriamo l'insieme $V = C([0, 1])$ delle funzioni continue a valori reali definite sull'intervallo $[0, 1] \subset \mathbb{R}$. La funzione $\|\cdot\|_1 : V \rightarrow [0, \infty)$

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx$$

è una norma, detta *norma della convergenza* $L^1([0, 1])$. La verifica delle proprietà della norma è elementare. Ad esempio, la subadittività della norma $\|\cdot\|_1$ segue dalla subadittività del valore assoluto e dalla monotonia dell'integrale. Precisamente, per $f, g \in V$ si ha

$$\|f + g\|_1 = \int_0^1 |f(x) + g(x)| dx \leq \int_0^1 (|f(x)| + |g(x)|) dx = \int_0^1 |f(x)| dx + \int_0^1 |g(x)| dx.$$

La palla centrata nella funzione nulla $f = 0$

$$B_r(0) = \left\{ g \in C([0, 1]) : \int_0^1 |g(x)| dx < r \right\}$$

è l'insieme delle funzioni continue g con integrale di $|g|$ minore di $r \geq 0$.

2. Successioni in uno spazio metrico

Una successione in uno spazio metrico (X, d) è una funzione $x : \mathbb{N} \rightarrow X$. Si usa la seguente notazione $x_n = x(n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e la successione si indica con $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

DEFINIZIONE 2.1. Una successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ad un punto $x \in X$ nello spazio metrico (X, d) se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0 \quad \text{ovvero} \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \forall n \geq \bar{n} : d(x_n, x) \leq \varepsilon.$$

In questo caso si scrive anche $x_n \rightarrow x$ per $n \rightarrow \infty$ in (X, d) oppure anche

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x,$$

si dice che la successione è *convergente* ovvero che x è il limite della successione.

Se il limite di una successione esiste allora è unico. Se infatti $x, y \in X$ sono entrambi limiti di $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, allora risulta

$$0 \leq d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

e quindi $d(x, y) = 0$ ovvero $x = y$.

3. Funzioni continue fra spazi metrici e in \mathbb{R}^n

DEFINIZIONE 3.1. Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici e sia $x_0 \in X$. Una funzione $f : X \rightarrow Y$ si dice continua nel punto $x_0 \in X$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in X$ vale

$$d(x, x_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

La funzione si dice *continua* se è continua in tutti i punti di X .

Negli spazi metrici, la continuità è equivalente alla continuità sequenziale, nel senso del seguente teorema.

TEOREMA 3.2. Siano $f : X \rightarrow Y$ e $x_0 \in X$. Sono equivalenti le seguenti due affermazioni:

- A) f è continua in x_0 ;
 B) Per ogni successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X vale l'implicazione:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \text{ in } X \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x) \text{ in } Y.$$

Dim. A) \Rightarrow B). Fissato $\varepsilon > 0$, dalla continuità di f segue l'esistenza di $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in X$ vale:

$$d_X(x, x_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Dalla convergenza della successione segue l'esistenza di $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per $n \geq \bar{n}$ si ha $d_X(x_n, x_0) < \delta$. Quindi per tali $n \geq \bar{n}$ deve essere $d_Y(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$.

B) \Rightarrow A). Supponiamo per assurdo che f non sia continua in $x_0 \in X$. Allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esistono dei punti $x_n \in X$ tali che $d_X(x_n, x_0) < 1/n$ ma $d_Y(f(x_n), f(x_0)) \geq \varepsilon$. La successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ contraddice l'affermazione B). \square

Per le funzioni $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ a valori reali si possono definire in modo naturale le operazioni di somma, moltiplicazione e reciproco. Queste funzioni ereditano la continuità delle funzioni da cui sono composte.

TEOREMA 3.3. Sia (X, d_X) uno spazio metrico e sia \mathbb{R} munito della distanza Euclidea. Siano $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni continue in un punto $x_0 \in X$. Allora:

- i) La funzione somma $f + g : X \rightarrow \mathbb{R}$ è continua nel punto x_0 ;
 ii) La funzione prodotto $f \cdot g : X \rightarrow \mathbb{R}$ è continua nel punto x_0 ;
 iii) Se $f \neq 0$ su X , allora la funzione reciproca $1/f : X \rightarrow \mathbb{R}$ è continua in x_0 .

La dimostrazione si basa sulle analoghe proprietà dei limiti di successioni reali ed è omessa.

Specializziamo la discussione al caso di $X = \mathbb{R}^n$ e $Y = \mathbb{R}^m$, $n, m \geq 1$, entrambi muniti della rispettiva distanza Euclidea. Più precisamente, dato un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ consideriamo lo spazio metrico (A, d) dove d è la distanza Euclidea su A ereditata dallo spazio ambiente.

TEOREMA 3.4. Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione, $f = (f_1, \dots, f_m)$, e sia $x_0 \in A \subset \mathbb{R}^m$ un punto fissato. Sono equivalenti:

- A) f è continua in x_0 ;
 B) le funzioni coordinate $f_1, \dots, f_m : A \rightarrow \mathbb{R}$ sono continue in x_0 .

Dim. L'implicazione A) \Rightarrow B) segue dalla disuguaglianza

$$|f_i(x) - f_i(x_0)| \leq |f(x) - f(x_0)|$$

che vale per ogni $i = 1, \dots, m$ e per ogni $x \in A$.

L'implicazione B) \Rightarrow A) si verifica nel seguente modo. Fissato $\varepsilon > 0$, per ogni $i = 1, \dots, m$ esiste $\delta_i > 0$ tale che

$$|x - x_0| < \delta_i \quad \Rightarrow \quad |f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon.$$

Con la scelta $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_m\}$ vale allora l'implicazione

$$|x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \sqrt{m}\varepsilon.$$

Questo termina la dimostrazione. \square

ESERCIZIO 16. Determinare tutti i parametri reali $\alpha, \beta \geq 0$ tali che la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sotto definita sia continua nel punto $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ rispetto alla distanza Euclidea:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Per individuare una possibile risposta al quesito studiamo la funzione f ristretta ad una retta nel piano della forma $y = mx$ per qualche $m \in \mathbb{R}$. Precisamente, consideriamo la funzione $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ così definita per $x \neq 0$

$$\varphi(x) = f(x, mx) = \frac{|x|^{\alpha+\beta} |m|^\beta}{x^2 + m^2 x^2} = |x|^{\alpha+\beta-2} \frac{|m|^\beta}{1 + m^2}.$$

Al limite per $x \rightarrow 0$ si ottiene:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha + \beta > 2, \\ \frac{|m|^\beta}{1+m^2} & \text{se } \alpha + \beta = 2, \\ +\infty & \text{se } \alpha + \beta < 2. \end{cases}$$

Da questo fatto deduciamo che per $\alpha + \beta \leq 2$ la funzione f non è continua in $(0, 0)$.

Proveremo che per $\alpha + \beta > 2$ la funzione è continua in $(0, 0)$ usando la definizione. Partiamo dalla seguente disuguaglianza:

$$\frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{x^2 + y^2} \leq (x^2 + y^2)^{\alpha/2 + \beta/2 - 1} = |(x, y)|^{\alpha + \beta - 2}.$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$ e cerchiamo $\delta > 0$ tale che

$$d_{\mathbb{R}^2}((x, y), (0, 0)) = |(x, y)| < \delta \quad \Rightarrow \quad d_{\mathbb{R}}(f(x, y), f(0, 0)) = \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{x^2 + y^2} < \varepsilon.$$

Per la disuguaglianza precedente, una possibile scelta di $\delta > 0$ che garantisce tale implicazione è la seguente:

$$\delta = \varepsilon^{\frac{1}{\alpha + \beta - 2}}$$

dove la radice è ben definita per $\alpha + \beta > 2$.

Il precedente esercizio può essere risolto in modo efficiente anche utilizzando le coordinate polari nel piano.

ESERCIZIO 17. Stabilire se la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sotto definita è continua nel punto $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ rispetto alla distanza Euclidea:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

L'esame di f lungo il fascio di rette $y = mx$, $m \in \mathbb{R}$, produce le seguenti informazioni. Chiaramente abbiamo

$$\varphi(x) = f(x, mx) = \frac{x^3 m}{x^4 + m^2 x^2} = \frac{xm}{x^2 + m^2},$$

e dunque, facendo il limite per $x \rightarrow 0$ con $m \in \mathbb{R}$ fissato, si trova:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = 0.$$

La restrizione di f ad una qualsiasi retta del fascio è continua nel punto $x = 0$. Questo non permette tuttavia di concludere che f è continua in $(0, 0)$.

In effetti, f non è continua in $(0, 0)$. Consideriamo infatti la restrizione di f ad una parabola della forma $y = mx^2$:

$$\psi(x) = f(x, mx^2) = \frac{x^4 m}{x^4 + m^2 x^4} = \frac{m}{1 + m^2}.$$

Se $m \neq 0$, la funzione ψ è una costante non nulla. Dunque per ogni $m \in \mathbb{R}$ è possibile scegliere successioni di punti $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nel piano tali che $(x_n, y_n) \rightarrow (0, 0)$ per $n \rightarrow \infty$ e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = \frac{m}{1 + m^2}.$$

Dunque, f non è continua in $(0, 0)$.

OSSERVAZIONE 3.5. L'Esercizio 17 mostra che esistono funzioni $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ con le seguenti proprietà:

- 1) La funzione $x \mapsto f(x, y)$ è continua in $x \in \mathbb{R}$, per ogni $y \in \mathbb{R}$ fissato;
- 2) La funzione $y \mapsto f(x, y)$ è continua in $y \in \mathbb{R}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ fissato;
- 3) La funzione $(x, y) \mapsto f(x, y)$ non è continua, ad esempio nel punto $(0, 0)$.

4. Spazi metrici completi

DEFINIZIONE 4.1 (Successione di Cauchy). Una successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in uno spazio metrico (X, d) si dice *di Cauchy* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \text{per ogni } m, n \geq \bar{n}.$$

Tutte le successioni convergenti sono di Cauchy, infatti se $x_n \rightarrow x$ allora per ogni $\varepsilon > 0$ si ha

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) \leq \varepsilon$$

per di scegliere $m, n \geq \bar{n}$ con $\bar{n} \in \mathbb{N}$ sufficientemente grande. Gli spazi metrici in cui tutte le successioni di Cauchy sono convergenti hanno proprietà speciali.

DEFINIZIONE 4.2 (Spazio metrico completo). Uno spazio metrico (X, d) si dice *completo* se ogni successione di Cauchy in (X, d) è convergente ad un elemento di X .

DEFINIZIONE 4.3 (Spazio di Banach). Uno spazio di Banach (reale) è uno spazio normato (reale) $(V, \|\cdot\|)$ che è completo rispetto alla metrica indotta dalla norma.

4.1. Esempi di spazi di Banach.

TEOREMA 4.4. I numeri reali \mathbb{R} con la distanza Euclidea formano uno spazio metrico completo.

Dim. Sia $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di Cauchy in \mathbb{R} . Proviamo preliminarmente che la successione è limitata. Infatti, scelto $\varepsilon = 1$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|x_n - x_m| < 1$ per $m, n \geq \bar{n}$, e in particolare per $n \geq \bar{n}$ si ha

$$|x_n| \leq |x_{\bar{n}}| + |x_n - x_{\bar{n}}| \leq 1 + |x_{\bar{n}}|,$$

e dunque, per $n \in \mathbb{N}$ si ha la maggiorazione

$$|x_n| \leq \max\{|x_1|, \dots, |x_{\bar{n}-1}|, 1 + |x_{\bar{n}}|\}.$$

Per il Teorema di Bolzano-Weierstrass, dalla successione limitata $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si può estrarre una sottosuccessione convergente $(x_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$. Ovvero esiste $x \in \mathbb{R}$ tale che $x_{n_j} \rightarrow x$ per $j \rightarrow \infty$.

Proviamo che $x_n \rightarrow x$ per $n \rightarrow \infty$. Fissato $\varepsilon > 0$ sia $\bar{n} \in \mathbb{N}$ data dalla condizione di Cauchy e scegliamo $j \in \mathbb{N}$ tale che $n_j \geq \bar{n}$ e $|x - x_{n_j}| < \varepsilon$. Allora per $n \geq \bar{n}$ risulta

$$|x_n - x| \leq |x_n - x_{n_j}| + |x_{n_j} - x| \leq 2\varepsilon.$$

Questo termina la dimostrazione. \square

ESEMPIO 4.5. I numeri razionali $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ con la distanza Euclidea $d(x, y) = |x - y|$, $x, y \in \mathbb{Q}$, non sono uno spazio metrico completo. Infatti la successione

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \in \mathbb{Q}, \quad n \in \mathbb{N},$$

è di Cauchy, in quanto converge (in \mathbb{R}) al numero $e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, ma il limite non è in \mathbb{Q} .

ESEMPIO 4.6. Lo spazio k -dimensionale \mathbb{R}^k , $k \in \mathbb{N}$, con la norma Euclidea è uno spazio di Banach. Infatti, se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy in \mathbb{R}^k , allora indicando con x_n^i la coordinata i -esima di x_n , $i = 1, \dots, k$, la successione $(x_n^i)_{n \in \mathbb{N}}$ a valori reali è di Cauchy in \mathbb{R} e dunque converge $x_n^i \rightarrow x^i \in \mathbb{R}$. Posto $x = (x^1, \dots, x^k) \in \mathbb{R}^k$, da questo segue che $x_n \rightarrow x$ in \mathbb{R}^k :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - x| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^k (x_n^i - x^i)^2 \right)^{1/2} = 0.$$

ESEMPIO 4.7. Lo spazio $X = C([0, 1])$ con la distanza data dalla norma integrale

$$d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$$

non è completo. Per $n \in \mathbb{N}$ sia $f_n \in C([0, 1])$ la funzione così definita

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1/2] \\ n(x - 1/2) & x \in [1/2, 1/2 + 1/n] \\ 1 & x \in [1/2 + 1/n, 1]. \end{cases}$$

La successione $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy. Infatti, dati $m, n \in \mathbb{N}$ con $m \geq n$ risulta

$$d(f_m, f_n) = \int_0^1 |f_n - f_m| dx \leq \int_{1/2}^{1/2+1/n} (|f_n| + |f_m|) dx \leq \frac{2}{n}.$$

La candidata funzione limite è la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1/2] \\ 1 & x \in (1/2, 1]. \end{cases}$$

In effetti, la funzione f è Riemann-integrabile su $[0, 1]$ e risulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |f_n(x) - f(x)| dx = 0,$$

ma f non è in $C([0, 1])$ perchè ha un punto di discontinuità. Dunque la successione $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ non converge ad un elemento di $X = C([0, 1])$.

TEOREMA 4.8. Lo spazio $X = C([0, 1]; \mathbb{R}^k)$, $k \geq 1$, con la norma della convergenza uniforme:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$$

è uno spazio di Banach.

Dim. Sia $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di Cauchy in X . Per ogni $x \in [0, 1]$ fissato, la successione $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy in \mathbb{R}^k e quindi è convergente. Esiste un punto che chiamiamo $f(x) \in \mathbb{R}^k$ tale che $f_n(x) \rightarrow f(x)$ per $n \rightarrow \infty$. Risulta definita una funzione $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^k$. Proviamo che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0.$$

Per ogni $\varepsilon > 0$ fissato, esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $x \in [0, 1]$ vale

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \text{per } m, n \geq \bar{n}.$$

Facendo tendere $m \rightarrow \infty$ e usando la convergenza $f_m(x) \rightarrow f(x)$ per $m \rightarrow \infty$ si ottiene per ogni $x \in [0, 1]$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{per } m, n \geq \bar{n}.$$

Questo prova l'affermazione.

Rimane da provare che $f \in X$, ovvero che $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^k$ è continua. Verifichiamo la continuità in un generico punto $x_0 \in [0, 1]$. Fissato $\varepsilon > 0$ scegliamo un $n \geq \bar{n}$ a nostro piacere. Siccome la funzione f_n è continua in x_0 , esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in [0, 1]$ si ha

$$|x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon.$$

Dunque, per $|x - x_0| < \delta$ si ottiene

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \leq 3\varepsilon.$$

Questo prova la continuità di f .

5. Convergenza puntuale e convergenza uniforme

Sia $A \subset \mathbb{R}^k$ un insieme e siano $f, f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, funzioni.

DEFINIZIONE 5.1 (Convergenza puntuale). Diciamo che la successione $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge puntualmente ad f su A se per ogni $x \in A$ risulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

DEFINIZIONE 5.2 (Convergenza uniforme). Diciamo che la successione $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente ad f su A se per ogni $x \in A$ risulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

La convergenza uniforme implica quella puntuale ma non viceversa.

ESEMPIO 5.3. Sia $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, la funzione $f_n(x) = x^n$. Per $x \in [0, 1]$ si ha il limite puntuale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

D'altra parte la convergenza, la convergenza non è uniformemente in quanto per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x)| = 1.$$

Ripetendo parola per parola la parte finale della dimostrazione del Teorema 4.8 si prova il seguente fatto:

TEOREMA 5.4. Siano $A \subset \mathbb{R}^k$, $k \geq 1$, $f_n \in C(A; \mathbb{R})$ funzioni continue ed $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Se $f_n \rightarrow f$ per $n \rightarrow \infty$ uniformemente su A allora $f \in C(A; \mathbb{R})$ e per ogni $x_0 \in A$ vale il teorema sullo scambio dei limiti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

6. Teorema delle contrazioni di Banach

Sia X un insieme e sia $T : X \rightarrow X$ una funzione da X in se stesso. Siamo interessati all'esistenza di soluzioni $x \in X$ dell'equazione $T(x) = x$. Un simile elemento $x \in X$ si dice *punto fisso* di T .

DEFINIZIONE 6.1 (Contrazione). Sia (X, d) uno spazio metrico. Un'applicazione (funzione) $T : X \rightarrow X$ è una *contrazione* se esiste un numero $0 < \lambda < 1$ tale che $d(T(x), T(y)) \leq \lambda d(x, y)$ per ogni $x, y \in X$.

TEOREMA 6.2 (Banach). Sia (X, d) uno spazio metrico completo e sia $T : X \rightarrow X$ una contrazione. Allora esiste un unico punto $x \in X$ tale che $x = T(x)$.

Dim. Sia $x_0 \in X$ un qualsiasi punto e si definisca la successione $x_n = T^n(x_0) = T \circ \dots \circ T(x_0)$, n -volte. Proviamo che la successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy. Infatti, per la disuguaglianza triangolare si ha per ogni $n, k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} d(x_{n+k}, x_n) &\leq \sum_{h=1}^k d(x_{n+h}, x_{n+h-1}) = \sum_{h=1}^k d(T^{n+h}(x_0), T^{n+h-1}(x_0)) \\ &\leq d(T(x_0), x_0) \sum_{h=1}^k \lambda^{n+h-1} \leq \lambda^n d(T(x_0), x_0) \sum_{h=1}^{\infty} \lambda^{h-1}. \end{aligned}$$

La serie converge e $\lambda^n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$, dal momento che $\lambda < 1$. Poichè X è completo, esiste un punto $x \in X$ tale che $x = \lim_{n \rightarrow \infty} T^n(x_0)$.

Proviamo che $x = T(x)$. La funzione $T : X \rightarrow X$ è continua e quindi abbiamo

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} T^n(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(T^{n-1}(x_0)) = T(\lim_{n \rightarrow \infty} T^{n-1}(x_0)) = T(x).$$

Proviamo infine che il punto fisso è unico. Sia $\bar{x} \in X$ tale che $\bar{x} = T(\bar{x})$. Allora abbiamo

$$d(x, \bar{x}) = d(T(x), T(\bar{x})) \leq \lambda d(x, \bar{x}) \quad \Rightarrow \quad d(x, \bar{x}) = 0,$$

perchè $\lambda < 1$, e quindi $x = \bar{x}$.

7. Topologia di uno spazio metrico

DEFINIZIONE 7.1 (Insiemi aperti e chiusi). Sia (X, d) uno spazio metrico

- i) Un insieme $A \subset X$ si dice *aperto* se per ogni $x \in A$ esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B_\varepsilon(x) \subset A$.
- ii) Un insieme $C \subset X$ si dice *chiuso* se $X \setminus C$ è aperto.

ESEMPIO 7.2.

- 1) Gli insiemi \emptyset, X sono contemporaneamente aperti e chiusi.
- 2) In $X = \mathbb{R}$ con la distanza $d(x, y) = |x - y|$ valgono i seguenti fatti:
 - i) Gli intervalli (a, b) con $-\infty \leq a, b \leq \infty$ sono aperti.
 - ii) Gli intervalli $[a, b]$ con $-\infty < a < b < \infty$ sono chiusi.
 - iii) Gli intervalli $[a, \infty)$ e $(-\infty, b]$ con $-\infty < a, b < \infty$ sono chiusi.
 - iv) Gli intervalli $(a, b]$ e $[a, b)$ con $-\infty < a, b < \infty$ non sono nè aperti nè chiusi.
- 3) In $X = \mathbb{R}^2$ con la distanza Euclidea:
 - i) Il cerchio $\{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$ è aperto.
 - ii) Il cerchio $\{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1\}$ è chiuso.
- 4) In uno spazio metrico generico (X, d) le palle $B_r(x)$, $x \in X$ e $r > 0$, sono aperte. Sia infatti $y \in B_r(x)$ ovvero $s := d(x, y) < r$. Scegliamo $\varepsilon > 0$ tale che $s + \varepsilon < r$. Se $z \in B_\varepsilon(y)$ allora dalla disuguaglianza triangolare segue che

$$d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x) < \varepsilon + s < r$$

e quindi $B_\varepsilon(y) \subset B_r(x)$.

DEFINIZIONE 7.3 (Interno e chiusura). Sia $A \subset X$ un insieme.

- i) Un punto $x \in X$ si dice *punto interno di A* se esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B_\varepsilon(x) \subset A$.
- ii) L'*interno di A* è l'insieme

$$A^\circ = \{x \in X : x \text{ è un punto interno di } A\}.$$

- iii) Un punto $x \in X$ si dice *punto di chiusura di A* se per ogni $\varepsilon > 0$ risulta $B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$.
- iv) La *chiusura di A* è l'insieme

$$\overline{A} = \{x \in X : x \text{ è un punto di chiusura di } A\}.$$

- v) La *frontiera di A* è l'insieme

$$\partial A = \{x \in X : B_r(x) \cap A \neq \emptyset \text{ e } B_r(x) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset \text{ per ogni } r > 0\}.$$

In altri termini, $\partial A = \overline{A} \cap \overline{(X \setminus A)}$.

ESEMPIO 7.4. In \mathbb{R}^2 con la distanza Euclidea consideriamo il cerchio aperto $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$. Allora:

- i) $A = A^\circ$, infatti A è aperto.
- ii) La chiusura di A è il cerchio chiuso $\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1\}$.
- iii) La frontiera di A è la circonferenza-bordo $\partial A = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\}$.

PROPOSIZIONE 7.5. Siano $A \subset X$ un insieme e $x \in X$. Sono equivalenti:

- A) $x \in \bar{A}$;
 B) Esiste una successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $x_n \in A$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ tale che $x_n \rightarrow x$ per $n \rightarrow \infty$.

Dim. A) \Rightarrow B) Se $x \in \bar{A}$ allora per ogni $r > 0$ risulta $B_r(x) \cap A \neq \emptyset$. In particolare, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $x_n \in A \cap B_{1/n}(x)$. La successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è contenuta in A e converge ad x in quanto $d(x_n, x) < 1/n$.

B) \Rightarrow A) Proviamo che la negazione di A) implica la negazione di B). Se $x \notin \bar{A}$ allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset$ e quindi non può esistere una successione contenuta in A convergente a x .

TEOREMA 7.6. Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $A \subset X$. Allora:

- i) A è aperto se e solo se $A = A^\circ$;
 ii) A è chiuso se e solo se $A = \bar{A}$.

Dim. La prova di i) è lasciata come esercizio. Proviamo ii).

Se A è chiuso allora $X \setminus A$ è aperto. È sufficiente provare che $\bar{A} \subset A$, perchè l'inclusione $A \subset \bar{A}$ è sempre verificata. Sia $x \in \bar{A}$. Se per assurdo fosse $x \in X \setminus A$ allora esisterebbe $\varepsilon > 0$ tale che $B_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset$ e non ci sarebbe una successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ contenuta in A tale che $x_n \rightarrow x$ per $n \rightarrow \infty$. Dunque deve essere $x \in A$.

Supponiamo ora che sia $A = \bar{A}$ e proviamo che A è chiuso, ovvero che il complementare $X \setminus A = X \setminus \bar{A}$ è aperto. Sia $x \in X \setminus \bar{A}$ un punto che non è di chiusura per A . Allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset$. Se così non fosse ci sarebbe una successione in A che converge ad x . Ma allora $B_\varepsilon(x) \subset X \setminus A$, che dunque è aperto. \square

ESEMPIO 7.7. Sia $A = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ la palla di raggio unitario in \mathbb{R}^n centrata nell'origine. Siccome A è aperto risulta $A^\circ = A$. La chiusura di A è la palla chiusa

$$\bar{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}.$$

Infatti, i punti sulla circonferenza $|x| = 1$ possono essere approssimati con successioni di punti contenuti in A . I punti nell'esterno, ovvero i punti $x \in \mathbb{R}^n$ tali che $|x| > 1$, non possono invece essere approssimati con successioni contenute in A e dunque non appartengono alla chiusura di A .

DEFINIZIONE 7.8. Sia (X, d) uno spazio metrico. La famiglia di insiemi

$$\tau(X) = \{A \subset X : A \text{ è aperto in } X\}$$

si dice *topologia* di X .

TEOREMA 7.9. La topologia di uno spazio metrico X verifica le seguenti proprietà:

- (A1) $\emptyset, X \in \tau(X)$;
 (A2) Se $A_1, A_2 \in \tau(X)$ allora $A_1 \cap A_2 \in \tau(X)$;
 (A3) Per ogni famiglia di indici \mathcal{A} risulta

$$A_\alpha \in \tau(X) \text{ per ogni } \alpha \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha \in \tau(X).$$

La verifica di questo teorema è elementare ed è omessa. In particolare, la proprietà (A2) si estende ad intersezioni *finite* di aperti. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale:

$$A_1, \dots, A_n \in \tau(X) \quad \Rightarrow \quad \bigcap_{k=1}^n A_k \in \tau(X).$$

La proprietà (A2), tuttavia, non si estende ad intersezioni *numerabili* di aperti. Infatti, l'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1 + \frac{1}{n}\right\}$$

non è aperto per essendo intersezione numerabile di aperti.

OSSERVAZIONE 7.10. In modo duale, la famiglia dei chiusi di uno spazio metrico verifica le seguenti proprietà:

- (C1) \emptyset, X sono chiusi;
- (C2) Se C_1, C_2 sono chiusi allora $C_1 \cup C_2$ è chiuso;
- (C3) Per ogni famiglia di indici \mathcal{A} risulta

$$A_\alpha \text{ è chiuso per ogni } \alpha \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha \text{ è chiuso.}$$

In generale, l'unione numerabile di chiusi non è chiuso.

TEOREMA 7.11 (Caratterizzazione topologica della continuità). Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici e sia $f : X \rightarrow Y$ una funzione. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

- 1) f è continua;
- 2) $f^{-1}(A) \subset X$ è aperto in X per ogni aperto $A \subset Y$;
- 3) $f^{-1}(C) \subset X$ è chiuso in X per ogni chiuso $C \subset Y$.

Dim. Proviamo l'implicazione 1) \Rightarrow 2). Verifichiamo che ogni punto $x_0 \in f^{-1}(A)$ è un punto interno di $f^{-1}(A)$. Siccome A è aperto e $f(x_0) \in A$, esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B_Y(f(x_0), \varepsilon) \subset A$. Per la continuità di f esiste $\delta > 0$ tale che $d_X(x, x_0) < \delta$ implica $d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. In altre parole, si ha $f(B_X(x_0, \delta)) \subset B_Y(f(x_0), \varepsilon)$. Ma allora si conclude che

$$B_X(x_0, \delta) \subset f^{-1}(f(B_X(x_0, \delta))) \subset f^{-1}(B_Y(f(x_0), \varepsilon)) \subset f^{-1}(A).$$

Notare che l'inclusione a sinistra in generale non è un'uguaglianza.

Proviamo l'implicazione 2) \Rightarrow 1). Controlliamo che f è continua in un generico punto $x_0 \in X$. Fissato $\varepsilon > 0$, l'insieme $B_Y(f(x_0), \varepsilon)$ è aperto e quindi l'antimmagine $f^{-1}(B_Y(f(x_0), \varepsilon))$ è aperta. Siccome $x_0 \in f^{-1}(B_Y(f(x_0), \varepsilon))$, esiste $\delta > 0$ tale che

$$B_X(x_0, \delta) \subset f^{-1}(B_Y(f(x_0), \varepsilon)),$$

da cui, passando alle immagini, segue che

$$f(B_X(x_0, \delta)) \subset f(f^{-1}(B_Y(f(x_0), \varepsilon))) \subset B_Y(f(x_0), \varepsilon).$$

Notare che l'ultima inclusione in generale non è un'uguaglianza. La catena di inclusioni provata mostra che se $d_X(x, x_0) < \delta$ allora $d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$, che è la continuità di f in x_0 .

Per provare l'equivalenza $2) \Leftrightarrow 3)$ si usa la seguente relazione insiemistica valida per ogni $B \subset Y$:

$$X \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(Y \setminus B).$$

Verifichiamo ad esempio $2) \Rightarrow 3)$. Sia $C \subset Y$ chiuso. Allora $A = Y \setminus C$ è aperto e quindi $f^{-1}(A) = f^{-1}(Y \setminus C) = X \setminus f^{-1}(C)$ è aperto. Ovvero, $f^{-1}(C)$ è chiuso.

OSSERVAZIONE 7.12. Nella dimostrazione precedente abbiamo usato le seguenti relazioni insiemistiche, per una funzione $f : X \rightarrow Y$:

- i) $A \subset f^{-1}(f(A))$ per ogni insieme $A \subset X$;
- ii) $f(f^{-1}(B)) \subset B$ per ogni insieme $B \subset Y$.

TEOREMA 7.13. Siano (X, d_X) , (Y, d_Y) e (Z, d_Z) spazi metrici e siano $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ funzioni continue. Allora la composizione $g \circ f : X \rightarrow Z$ è continua.

Dim. Usiamo la caratterizzazione 2) di continuità nel Teorema precedente. Se $A \subset Z$ è un aperto allora $g^{-1}(A) \subset Y$ è un aperto, e dunque $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A)) \subset X$ è un aperto. \square

8. Spazi metrici compatti. Teorema di Weierstrass

DEFINIZIONE 8.1 (Spazio metrico compatto). Uno spazio metrico (X, d) si dice (*sequenzialmente*) *compatto* se ogni successione di punti $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in K ha una sottosuccessione che converge ad un elemento di K .

DEFINIZIONE 8.2 (Insieme limitato). Un insieme K nello spazio metrico (X, d) si dice *limitato* se esiste un punto (equivalentemente: per ogni punto) $x_0 \in X$ ed esiste $R > 0$ tale che $K \subset B(x_0, R)$.

PROPOSIZIONE 8.3. Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $K \subset X$ un sottoinsieme compatto. Allora K è chiuso e limitato.

Dim. Proviamo che $K = \overline{K}$. Per ogni $x \in \overline{K}$ esiste una successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in K che converge ad x . Questa successione ha una sottosuccessione $(x_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ che converge ad un elemento di K . Ma questo elemento deve essere x , che quindi appartiene a K .

Supponiamo per assurdo che K non sia limitato. Allora esiste un punto $x_0 \in X$ tale che $K \cap (X \setminus B(x_0, R)) \neq \emptyset$ per ogni $R > 0$. In particolare, con la scelta $R = n \in \mathbb{N}$ esistono punti $x_n \in K$ tali che $d(x_n, x_0) \geq n$. La successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è in K . Quindi esiste una sottosuccessione $(x_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ convergente ad un elemento $x \in K$. Ma allora

$$d(x, x_0) \geq d(x_0, x_{n_j}) - d(x_{n_j}, x) \geq n_j - d(x_{n_j}, x) \rightarrow \infty$$

per $j \rightarrow \infty$. Questo è assurdo perchè $d(x, x_0) < \infty$.

ESEMPIO 8.4. Sia $X = C([0, 1])$ con la distanza indotta dalla norma $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$. L'insieme

$$K = \{f \in X : \|f\|_\infty \leq 1\}$$

è chiuso. Infatti se una successione di funzioni continue $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tali che $|f_n(x)| \leq 1$ per ogni $x \in [0, 1]$ converge uniformemente ad una funzione f , allora anche f è continua e inoltre $|f(x)| \leq 1$ per ogni $x \in [0, 1]$. Dunque $f \in K$. L'insieme K è anche limitato. Infatti è una palla chiusa centrata nella funzione nulla.

L'insieme K tuttavia non è compatto. Infatti, la successione di funzioni $f_n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1/2] \\ n(x - 1/2) & x \in [1/2, 1/2 + 1/n] \\ 1 & x \in [1/2 + 1/n, 1]. \end{cases}$$

è in K , ma non ha alcuna sottosuccessione che converge uniformemente. Se tale sottosuccessione esistesse, dovrebbe convergere al limite puntuale della successione $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, che è una funzione discontinua. \square

TEOREMA 8.5 (Heine-Borel). Sia \mathbb{R}^m , $m \geq 1$, munito della distanza Euclidea e sia $K \subset \mathbb{R}^n$ un insieme. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

- (A) K è compatto;
- (B) K è chiuso e limitato.

Dim. Proviamo l'affermazione non banale (B) \Rightarrow (A). Sia $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di punti in K . Scriviamo le coordinate $x_n = (x_n^1, \dots, x_n^m)$. La successione reale $(x_n^1)_{n \in \mathbb{N}}$ è limitata e dunque ha una sottosuccessione $(x_{n_j}^1)_{j \in \mathbb{N}}$ convergente ad un numero $x^1 \in \mathbb{R}$. La successione $(x_{n_j}^2)_{j \in \mathbb{N}}$ è limitata e quindi ha una sottosuccessione convergente ad un numero $x^2 \in \mathbb{R}$. Si ripete tale procedimento di sottoselezione m volte. Dopo m sottoselezioni successive si trova una scelta di indici $j \mapsto k_j$ tale che ciascuna successione di coordinate $(x_{k_j}^i)_{j \in \mathbb{N}}$ converge ad un numero $x^i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$. Ma allora $(x_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ converge a $x = (x^1, \dots, x^m) \in \mathbb{R}^m$. Siccome K è chiuso, deve essere $x \in K$.

TEOREMA 8.6. Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici e sia $f : X \rightarrow Y$ continua. Se X è compatto allora $f(X) \subset Y$ è compatto in Y .

Dim. Sia $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione in $f(X)$. Esistono punti $x_n \in X$ tali che $f(x_n) = y_n$, $n \in \mathbb{N}$. La successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ha una sottosuccessione $(x_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ che converge ad un punto $x_0 \in X$. Siccome f è continua si ha

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f(x_{n_j}) = f(x_0).$$

In altri termini, $y_{n_j} \rightarrow f(x_0) \in f(X)$ per $j \rightarrow \infty$.

COROLLARIO 8.7 (Weierstrass). Sia (X, d) uno spazio metrico compatto e sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora esistono $x_0, x_1 \in X$ tali che

$$f(x_0) = \max_{x \in X} f(x) \quad \text{e} \quad f(x_1) = \min_{x \in X} f(x).$$

Dim. Infatti $f(X) \subset \mathbb{R}$ è compatto, e quindi chiuso e limitato. Dunque l'insieme $f(X)$ ha elemento minimo ed elemento massimo. \square

9. Insiemi connessi

DEFINIZIONE 9.1 (Spazio connesso). Uno spazio metrico (X, d) si dice connesso se $X = A_1 \cup A_2$ con A_1, A_2 aperti tali che $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ implica che $A_1 = \emptyset$ oppure $A_2 = \emptyset$.

Se X non è connesso allora esistono due insiemi aperti disgiunti e non-vuoti A_1 e A_2 tali che $X = A_1 \cup A_2$. Quindi $A_1 = X \setminus A_2$ e $A_2 = X \setminus A_1$ sono contemporaneamente aperti e chiusi. Se X è connesso \emptyset e X sono gli unici insiemi ad essere sia aperti che chiusi.

Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $Y \subset X$ un suo sottoinsieme. Allora (Y, d) è ancora uno spazio metrico che avrà la sua topologia $\tau(Y)$, che si dice *topologia indotta* da X su Y o *topologia relativa*.

ESERCIZIO 18. Sia $Y \subset X$ con la topologia relativa. Provare che un insieme $A \subset Y$ è aperto in Y se e solo se esiste un insieme aperto $B \subset X$ tale che $A = Y \cap B$.

ESEMPIO 9.2. Sia $X = \mathbb{R}$ e $Y = [0, 1]$. L'insieme $[0, 1/2) \subset [0, 1]$ è relativamente aperto in $[0, 1]$ in quanto $[0, 1/2) = [0, 1] \cap (-\infty, 1/2)$.

DEFINIZIONE 9.3. Sia (X, d) uno spazio metrico. Un sottoinsieme $Y \subset X$ si dice *connesso* se è connesso rispetto alla topologia indotta. Precisamente, se $Y = (Y \cap A_1) \cup (Y \cap A_2)$ con A_1, A_2 aperti di X e unione disgiunta, allora $Y \cap A_1 = \emptyset$ oppure $Y \cap A_2 = \emptyset$.

ESEMPIO 9.4. Sia \mathbb{R} munito della distanza Euclidea.

- 1) L'insieme $A \subset \mathbb{R}$, $A = [-2, -1] \cup [1, 2]$ non è connesso in \mathbb{R} . Infatti la seguente unione è disgiunta:

$$A = (A \cap (-3, 0)) \cup (A \cap (0, 3)).$$

- 2) L'intervallo $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ è connesso. Proviamo questo fatto. Siano A_1, A_2 aperti di \mathbb{R} tali che:

$$I = (I \cap A_1) \cup (I \cap A_2).$$

con unione disgiunta. Supponiamo ad esempio che $0 \in A_1$. Definiamo

$$\bar{x} = \sup \{x \in [0, 1] : [0, x) \subset I \cap A_1\}.$$

Deve essere $0 < \bar{x} \leq 1$. Se fosse $\bar{x} \in A_2$ allora $\bar{x} - \varepsilon \in I \cap A_2$ per qualche $\varepsilon > 0$ ma allora $I \cap A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$. Questo non è possibile. Quindi $\bar{x} \in I \cap A_1$.

Se $\bar{x} < 1$ allora esiste $\delta > 0$ tale che $\bar{x} + \varepsilon \in A_1 \cap I$ per ogni $0 < \varepsilon < \delta$. Dunque $[\bar{x}, \delta) \subset A_1$ e questo contraddice la definizione di \bar{x} . Quindi $\bar{x} = 1$ e dunque $I \subset A_1$ e quindi $I \cap A_2 = \emptyset$. Altrimenti $(I \cap A_1) \cap (I \cap A_2) \neq \emptyset$.

TEOREMA 9.5. Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici e sia $f : X \rightarrow Y$ continua. Se X è connesso allora $f(X) \subset Y$ è connesso.

Dim. Siano $A_1, A_2 \subset Y$ insiemi aperti tali che

$$f(X) = (f(X) \cap A_1) \cup (f(X) \cap A_2)$$

con unione disgiunta. Allora

$$\begin{aligned} X &= f^{-1}(f(X)) = f^{-1}((f(X) \cap A_1) \cup (f(X) \cap A_2)) \\ &= f^{-1}(f(X) \cap A_1) \cup f^{-1}(f(X) \cap A_2) \\ &= (X \cap f^{-1}(A_1)) \cup (X \cap f^{-1}(A_2)) = f^{-1}(A_1) \cup f^{-1}(A_2). \end{aligned}$$

L'ultima unione è disgiunta e gli insiemi $f^{-1}(A_1)$, $f^{-1}(A_2)$ sono aperti. Siccome X è connesso deve essere $f^{-1}(A_1) = \emptyset$ oppure $f^{-1}(A_2) = \emptyset$. Dunque, si ha $f(X) \cap A_1 = \emptyset$ oppure $f(X) \cap A_2 = \emptyset$.

DEFINIZIONE 9.6 (Spazio connesso per archi). Uno spazio metrico (X, d) si dice *connesso per archi* se per ogni coppia di punti $x, y \in X$ esiste una curva continua $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ tale che $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$.

TEOREMA 9.7. Se uno spazio metrico (X, d) è connesso per archi allora è connesso.

Dim. Supponiamo per assurdo che X non sia connesso. Allora esistono due aperti A_1, A_2 disgiunti e non vuoti tali che $X = A_1 \cup A_2$. Siano $x \in A_1$ e $y \in A_2$, e sia $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ una curva continua tale che $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$. Ma allora

$$[0, 1] = ([0, 1] \cap \gamma^{-1}(A_1)) \cup ([0, 1] \cap \gamma^{-1}(A_2))$$

con unione disgiunta e $\gamma^{-1}(A_1)$ e $\gamma^{-1}(A_2)$ aperti non vuoti in $[0, 1]$. Questo è assurdo.

ESERCIZIO 19. Si consideri il seguente sottoinsieme del piano:

$$A = \{(x, \sin(1/x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, 1]\} \cup \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1, 1]\}$$

con la topologia indotta dal piano. Provare che A è connesso ma non è connesso per archi.

ESEMPIO 9.8.

- 1) \mathbb{R}^n è connesso per ogni $n \geq 1$.
- 2) $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ è connesso per $n \geq 2$ ma non è connesso per $n = 1$.
- 3) $\mathbb{R}^n \setminus \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$ non è connesso, $n \geq 1$.
- 4) $\mathbb{R}^n \setminus \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ non è connesso, $n \geq 1$.

TEOREMA 9.9. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto connesso (non vuoto). Allora A è connesso per archi.

Dim. Dimostreremo un'affermazione più precisa: A è connesso per curve poligonali. Sia $x_0 \in A$ un punto scelto a nostro piacere. Definiamo il seguente insieme

$$A_1 = \{x \in A : x \text{ si connette a } x_0 \text{ con una curva poligonale contenuta in } A\}.$$

Proviamo che A_1 è aperto. Infatti, se $x \in A_1 \subset A$ allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B_\varepsilon(x) \subset A$, in quanto A è aperto. Ogni punto di $y \in B_\varepsilon(x)$ si collega al centro x con un segmento contenuto in A . Dunque y si collega a x_0 con una curva poligonale contenuta in A , ovvero $B_\varepsilon(x) \subset A_1$.

Sia $A_2 = A \setminus A_1$. Proviamo che anche A_2 è aperto. Se $x \in A_2 \subset A$ allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B_\varepsilon(x) \subset A$. Affermiamo che $B_\varepsilon(x) \subset A_2$. Se così non fosse troveremmo $y \in B_\varepsilon(x) \cap A_1$. Il punto x_0 si collega a y con una curva poligonale in A ed y si collega ad x con un segmento contenuto in A . Quindi $x \in A_1$, che non è possibile. Questo argomento prova che A_2 è aperto. Allora abbiamo

$$X = A_1 \cup A_2$$

con A_1 e A_2 aperti ed unione disgiunta. Siccome X è connesso, uno degli aperti deve essere vuoto. Siccome $A_1 \neq \emptyset$ allora $A_2 = \emptyset$. Questo termina la dimostrazione. \square

TEOREMA 9.10 (Valori intermedi). Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto connesso e sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora per ogni $t \in (\inf_A f, \sup_A f)$ esiste un punto $x \in A$ tale che $f(x) = t$.

Dim. Siano $x_0, x_1 \in A$ tali che $f(x_0) < t < f(x_1)$. Sia $\gamma : [0, 1] \rightarrow A$ una curva continua tale che $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma(1) = x_1$. La composizione $\varphi(s) = f(\gamma(s))$, $s \in [0, 1]$, è continua. Per il Teorema dei valori intermedi in una dimensione esiste $s \in (0, 1)$ tale che $\varphi(s) = t$. Il punto $x = \gamma(s) \in A$ verifica la tesi del teorema. \square

10. Esercizi svolti in classe

ESERCIZIO 20. Si consideri la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \frac{(n+1)x + n^2x^3}{1 + n^2x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ su sottoinsiemi (ad esempio intervalli) di \mathbb{R} .

Risposte. La successione converge puntualmente su \mathbb{R} alla funzione $f(x) = x$. Su intervalli del tipo $[0, \varepsilon]$, $(0, \varepsilon]$, $[-\varepsilon, 0)$, etc. con $\varepsilon > 0$, non c'è convergenza uniforme. Su insiemi del tipo $(-\infty, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, \infty)$ con $\varepsilon > 0$ c'è convergenza uniforme.

ESERCIZIO 21. Sia $\alpha \in (0, 1]$ e definiamo la funzione $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$

$$d(x, y) = |x - y|^\alpha, \quad x, y \in \mathbb{R}^n,$$

dove $|\cdot|$ indica la norma Euclidea di \mathbb{R}^n . Provare che (\mathbb{R}^n, d) è uno spazio metrico.

Cenni di soluzione. Per provare la disuguaglianza triangolare si usa la disuguaglianza

$$(t + s)^\alpha \leq t^\alpha + s^\alpha, \quad s, t \geq 0,$$

che è valida per $0 < \alpha \leq 1$. La verifica di tale disuguaglianza si riduce a controllare che

$$(t + 1)^\alpha \leq t^\alpha + 1, \quad t \geq 0.$$

Questa disuguaglianza segue dal fatto che $(t + 1)^{\alpha-1} \leq t^{\alpha-1}$ per $t > 0$ in quanto $\alpha - 1 \leq 0$.

ESERCIZIO 22. Determinare tutti i numeri $\alpha \geq 0$ tali che la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \sqrt{1 + \alpha x^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

sia una contrazione rispetto alla distanza Euclidea.

Cenni di soluzione. Con disuguaglianze elementari oppure utilizzando il Teorema di Lagrange si arriva alla disuguaglianza

$$|f(x) - f(y)| \leq \sqrt{\alpha} |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Dunque se $\alpha < 1$ la funzione f è una contrazione.

Se $\alpha \geq 1$ l'equazione di punto fisso $f(x) = x$ non ha soluzione. Quindi f non è una contrazione. Alternativamente, si può mostrare che

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{|f(x) - f(0)|}{|x|} = \sqrt{\alpha}.$$

ESERCIZIO 23. Sia $h \in C([0, 1])$ una funzione assegnata. Verificare che l'equazione funzionale

$$f(x) = h(x) + \frac{1}{2} \sin(x) \int_0^x f(t) dx, \quad x \in [0, 1],$$

ha una soluzione unica $f \in C([0, 1])$.

Cenni di soluzione. Sia $X = C([0, 1])$ con la norma della convergenza uniforme e sia $T : X \rightarrow X$ la trasformazione

$$T(f)(x) = h(x) + \frac{1}{2} \sin(x) \int_0^x f(t) dx, \quad x \in [0, 1].$$

Verifichiamo che T è una contrazione. Infatti, per ogni $f, g \in X$ si ha

$$|T(f)(x) - T(g)(x)| = \left| \frac{1}{2} \sin(x) \int_0^x (f(t) - g(t)) dx \right| \leq \frac{1}{2} \|f - g\|_\infty, \quad x \in [0, 1]$$

e dunque

$$\|T(f) - T(g)\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|f - g\|_\infty.$$

Dunque T è una contrazione e per il Teorema di punto fisso di Banach T ha in X un unico punto fisso.

ESERCIZIO 24. Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ il seguente insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 - x^2 + y^2 < 0\}.$$

- 1) Dire se A è compatto e/o connesso.
- 2) Dire se \bar{A} è compatto e/o connesso.

Soluzione. Vediamo se A è limitato. Una condizione sulla coordinata x è immediata:

$$x^4 - x^2 \leq x^4 - x^2 + y^4 + y^2 < 0,$$

da cui si ottiene $x^2 < 1$, ovvero $x \in (-1, 1)$. Con questa restrizione su x possiamo risolvere la disequazione in y per x fissato. Dopo qualche conto, si ottiene

$$|y| < \varphi(x) = \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{1 + 4(x^2 - x^4)}}{2}},$$

e dunque

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| < \varphi(x), x \in (-1, 1)\}.$$

Uno studio della funzione φ mostra che A è l'unione di due insiemi aperti. Dunque A non è connesso.

Dallo studio precedente si deduce anche che

$$\bar{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq \varphi(x), x \in [-1, 1]\}.$$

L'insieme \bar{A} è chiuso e limitato e dunque compatto. L'insieme \bar{A} è anche connesso, in quanto è chiaramente connesso per archi.

ESERCIZIO 25. Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ l'insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 + x^2 - y^2 < 1\}.$$

- i) Provare che A è limitato;

- ii) Dire se A è aperto e/o chiuso;
 ii) Calcolare A° , \bar{A} e ∂A .

Soluzione. Se $(x, y) \in A$ allora

$$y^2(y^2 - 1) \leq x^4 + x^2 + y^2(y^2 - 1) < 1$$

e quindi, posto $t = y^2$, si ottiene $t^2 - t - 1 < 0$ con $t \geq 0$. La soluzione è

$$y^2 = t \leq \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Inoltre si ha

$$x^2 \leq x^2 + x^4 < 1 + y^2(1 - y^2) \leq \frac{5}{4}.$$

In definitiva si ha l'inclusione

$$A \subset \left[-\sqrt{5}/2, \sqrt{5}/2 \right] \times \left[-\sqrt{(1 + \sqrt{5})}/2, -\sqrt{(1 + \sqrt{5})}/2 \right].$$

Proviamo che A è aperto. La funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = x^4 + x^2 + y^4 - y^2$$

è continua. Dunque, l'insieme $A = f^{-1}((-\infty, 1))$ è aperto. Per verificare che A non è chiuso è sufficiente considerare la successione di punti

$$(x_n, y_n) = \left(\sqrt[4]{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right)}, \sqrt[4]{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right)} \right), \quad n \in \mathbb{N},$$

ed osservare che $(x_n, y_n) \in A$, $(x_n, y_n) \rightarrow (\sqrt[4]{1/2}, \sqrt[4]{1/2})$ e che $f((\sqrt[4]{1/2}, \sqrt[4]{1/2})) = 1$. Dunque il punto limite è in \bar{A} ma non in A .

Mostriamo che risulta

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 + x^2 - y^2 \leq 1\}, \\ \partial A &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 + x^2 - y^2 = 1\}. \end{aligned}$$

È sufficiente provare le seguenti affermazioni per un punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

- 1) $f(x, y) = 1$ implica $(x, y) \in \bar{A}$;
- 2) $f(x, y) > 1$ implica $(x, y) \notin \bar{A}$.

La verifica di 2) si basa sulla continuità di f . Infatti, l'insieme $\{f > 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) > 1\}$ è aperto e per ogni punto (x, y) in questo insieme esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B_\varepsilon(x, y) \subset \{f > 1\}$.

Supponiamo ora che $f(x, y) = 1$. Una possibile idea è di descrivere l'insieme $\{f = 0\}$ localmente come un grafico della forma $x \mapsto \varphi(x)$ oppure $y \mapsto \psi(y)$. In effetti, se $(x, y) \in A$ allora

$$x^2 < \frac{-1 + \sqrt{1 - 4(y^4 - y^2 - 1)}}{2}.$$

L'espressione a destra deve essere positiva. Dopo pochi conti, si ottiene la condizione di compatibilità è $y^4 - y^2 - 1 < 0$, che abbiamo già studiato: $y^2 < (1 + \sqrt{5})/2$.

In definitiva, deve essere

$$|x| < \psi(y) = \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{1 - 4(y^4 - y^2 - 1)}}{2}}.$$

Siamo arrivati alla seguente conclusione:

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 < (1 + \sqrt{5})/2, |x| < \psi(y) \right\}.$$

Ora si ottengono facilmente le tesi desiderate.

ESERCIZIO 26. Stabilire se l'insieme $K \subset \mathbb{R}^3$ con la distanza Euclidea è compatto

$$K = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z \leq 1, x + y^2 + z^2 \leq 1 \right\}.$$

Descrivere K geometricamente.

L'insieme K è l'intersezione dei due insiemi

$$K_1 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z \leq 1 \right\},$$

$$K_2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y^2 + z^2 \leq 1 \right\}.$$

Sia K_1 che K_2 sono chiusi, perchè antimmagini di insiemi chiusi rispetto a funzioni continue. Dunque $K = K_1 \cap K_2$ è chiuso.

Verifichiamo che K è limitato. Seguirà che K è compatto, per il Teorema di Heine-Borel. Se $(x, y, z) \in K$ allora

$$x^2 + y^2 + z \leq 1 \quad \text{e} \quad x + y^2 + z^2 \leq 1.$$

Sommando membro a membro le due disequazioni si ottiene

$$x^2 + x + z^2 + z \leq x^2 + x + 2y^2 + z^2 + z \leq 2.$$

Completando i quadrati si ottiene

$$(x + 1/2)^2 + (z + 1/2)^2 \leq 2 + 1/2 = 5/2.$$

Si deduce che esistono due numeri $a < 0 < b$ tali che $a \leq x, z \leq b$. La stima su y è ora facile:

$$y^2 \leq 1 - x^2 - z \leq 1 - z \leq 1 - a.$$

L'insieme K è limitato:

$$K \subset [a, b] \times [-\sqrt{1-a}, \sqrt{1-a}] \times [a, b].$$

ESERCIZIO 27. Sia X un insieme non vuoto e sia $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione così definita:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y, \\ 1 & \text{se } x \neq y. \end{cases}$$

- 1) Provare che (X, d) è uno spazio metrico.
- 2) Descrivere le palle in X .
- 3) Descrivere gli insiemi aperti.
- 4) Caratterizzare gli insiemi compatti in X .
- 5) Caratterizzare gli insiemi connessi in X .
- 6) Provare che (X, d) è completo.

ESERCIZIO 28. Per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ sia $A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1,\dots,n}$ una matrice $n \times n$ simmetrica tale che $x \mapsto A(x)$ sia continua, ovvero $x \mapsto a_{ij}(x)$ è continua per ogni $i, j = 1, \dots, n$. Siano $\lambda_1(x) \leq \dots \leq \lambda_n(x) \in \mathbb{R}$ gli autovalori di $A(x)$. Per ogni vettore $v \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ vale

$$\lambda_1(x)|v|^2 \leq \langle A(x)v, v \rangle \leq \lambda_n(x)|v|^2.$$

Supponiamo che $\lambda_1 \geq 0$. Per ogni curva $\gamma \in C^1([0, 1]; \mathbb{R}^n)$, o più in generale C^1 a tratti su $[0, 1]$, definiamo la lunghezza

$$\ell(\gamma) = \int_0^1 \langle A(\gamma(t))\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle^{1/2} dt.$$

Quando $A(x)$ è la matrice identità si ottiene la lunghezza Euclidea di γ .

Dati due punti $x, y \in \mathbb{R}^n$ definiamo

$$d(x, y) = \inf \{ \ell(\gamma) : \gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ } C^1 \text{ a tratti con } \gamma(0) = x \text{ e } \gamma(1) = y \}.$$

- 1) Supponiamo che esista $m > 0$ tale che $\lambda_1(x) \geq m$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Provare che (\mathbb{R}^n, d) è uno spazio metrico.
- 2) Supponiamo in aggiunta che esista $M > 0$ tale che $\lambda_n(x) \leq M$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Provare che (\mathbb{R}^n, d) è uno spazio metrico completo.

Lo spazio metrico (\mathbb{R}^n, d) è un esempio di “varietà Riemanniana”.

11. Esercizi

ESERCIZIO 29. Studiare la convergenza puntuale e uniforme su opportuni sottoinsiemi di \mathbb{R} della successione di funzioni $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ così definita

$$f_n(x) := \frac{1 + x^n}{n + x^{2n}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

ESERCIZIO 30. Sia (X, d) uno spazio metrico e definiamo la funzione $\delta : X \times X \rightarrow [0, \infty)$

$$\delta(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}, \quad x, y \in X.$$

Verificare che (X, δ) è uno spazio metrico.

ESERCIZIO 31. Sia $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$ la funzione così definita:

$$d(x, y) = \begin{cases} |x - y| & \text{se } x, y \text{ e } 0 \text{ sono collineari,} \\ |x| + |y| & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Provare che d è una metrica su \mathbb{R}^2 e descrivere (graficamente) le palle in questa metrica.

ESERCIZIO 32. Definiamo le funzioni $|\cdot|_1, |\cdot|_\infty : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$

$$|x|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|, \quad |x|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Provare che $(\mathbb{R}^n, |\cdot|_1)$ e $(\mathbb{R}^n, |\cdot|_\infty)$ sono spazi normati e che come spazi metrici sono completi.

ESERCIZIO 33. Sia $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ la funzione

$$d(x, y) = \arctan(|x - y|), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Provare che (\mathbb{R}, d) è uno spazio metrico. Stabilire se tale spazio metrico è completo.

ESERCIZIO 34. Sia $V = C([0, 1])$. 1) Provare che la funzione $\|\cdot\|_2 : V \times V \rightarrow [0, \infty)$ così definita

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

è una norma su V . Provare preliminarmente che per ogni $f, g \in V$ vale la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$\left| \int_0^1 f(x)g(x)dx \right| \leq \|f\|_2 \|g\|_2$$

2) Dire se il corrispondente spazio metrico è completo.

ESERCIZIO 35. Siano $\lambda \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}^n$ e consideriamo la funzione $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$T(x) = \lambda x + b, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

- 1) Calcolare una formula per l'iterazione $T^k(x_0) = T \circ \dots \circ T(x_0)$ k volte, dove $x_0 \in \mathbb{R}^n$ è un punto fissato;
- 2) Stabilire per quali valori di λ la trasformazione T è una contrazione rispetto alla distanza Euclidea e per tali valori calcolare il limite di $T^k(x_0)$ per $k \rightarrow \infty$.

ESERCIZIO 36. Provare che un insieme aperto $A \subset \mathbb{R}$ è l'unione numerabile di intervalli aperti disgiunti.

ESERCIZIO 37. Siano (X, d) uno spazio metrico e $A \subset X$ un suo sottoinsieme. Provare le seguenti affermazioni:

- i) A° è il più grande insieme aperto contenuto in A ;
- ii) \overline{A} è il più piccolo insieme chiuso che contiene A .

ESERCIZIO 38. Sia \mathbb{R} munito della distanza Euclidea e sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Provare o confutare tramite controesempi le seguenti affermazioni: i) $f(A)$ aperto $\Rightarrow A$ aperto; ii) A aperto $\Rightarrow f(A)$ aperto; iii) $f(A)$ chiuso $\Rightarrow A$ chiuso; ii) A chiuso $\Rightarrow f(A)$ chiuso.

ESERCIZIO 39. Sia (X, d) uno spazio metrico. Per $x_0 \in X$ ed $r > 0$ definiamo

$$B_r(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\},$$

$$K_r(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\},$$

$$S_r(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) = r\}.$$

Provare che $\partial B_r(x_0) \subset S_r(x_0)$ e che $\overline{B_r(x_0)} \subset K_r(x_0)$. Mostrare tramite esempi che le inclusioni possono essere strette.

ESERCIZIO 40. Sia (X, d) uno spazio metrico e siano $K_1, \dots, K_n \subset X$ insiemi compatti. Provare che $K_1 \cup \dots \cup K_n$ e $K_1 \cap \dots \cap K_n$ sono ancora compatti. È vero che l'unione numerabile di compatti è ancora un insieme compatto? È vero che l'intersezione numerabile di compatti è ancora un insieme compatto?

ESERCIZIO 41. Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $K \subset X$ un sottoinsieme chiuso. Provare che:

- (1) Se X è compatto allora anche K è compatto.
- (2) Se X è completo allora anche K è completo con la distanza ereditata da X .

CAPITOLO 5

Calcolo differenziale in più variabili

Libro di testo, Capitolo 3 da pagina 126 a pagina 155; da pagina 159 a pagina 185.

Teoremi di invertibilità locale e della funzione implicita

1. Teorema di invertibilità locale

Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione *lineare*. Fissato un vettore $b \in \mathbb{R}^n$ l'equazione $f(x) = b$ ha certamente *una soluzione unica* $x \in \mathbb{R}^n$ se f ha determinante diverso da 0, $\det(f) \neq 0$. In questo caso, infatti, la funzione f è invertibile e la soluzione è $x = f^{-1}(b)$.

Vogliamo generalizzare questo risultato di risolubilità di sistemi di equazioni al caso in cui f sia una funzione *non lineare*. Dobbiamo preliminarmente introdurre i concetti di *diffeomorfismo* e di *diffeomorfismo locale*.

DEFINIZIONE 1.1 (Diffeomorfismo). Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto. Una funzione $f \in C^k(A; \mathbb{R}^n)$, $1 \leq k \leq \infty$, si dice *diffeomorfismo di classe C^k* se:

- i) $f : A \rightarrow f(A) \subset \mathbb{R}^n$ è iniettiva (e suriettiva);
- ii) La funzione inversa verifica $f^{-1} \in C^k(f(A); A)$; in particolare $f(A) \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto.

DEFINIZIONE 1.2 (Diffeomorfismo locale). Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto. Una funzione $f \in C^k(A; \mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$, si dice un *diffeomorfismo locale di classe C^k* se:

- i) f è aperta, e cioè trasforma insiemi aperti in aperti.
- ii) Per ogni punto $x \in A$ esiste un $\delta > 0$ tale che $f : B_\delta(x) \rightarrow \mathbb{R}^n$ è iniettiva e la funzione inversa verifica $f^{-1} \in C^k(f(B_\delta(x)); \mathbb{R}^n)$.

In particolare, se f è un diffeomorfismo locale allora $f(A) \subset \mathbb{R}^n$ è aperto.

TEOREMA 1.3 (Invertibilità locale). Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $f \in C^k(A; \mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

- A) f è un diffeomorfismo locale di classe C^k ;
- B) $\det(J_f(x_0)) \neq 0$ in ogni punto $x_0 \in A$, dove J_f è la matrice Jacobiana di f .

ESEMPIO 1.4. Si consideri il seguente sistema di due equazioni nelle incognite $x, y \in \mathbb{R}$

$$(1.21) \quad \begin{cases} x + y \sin x = b_1 \\ x^2 y + \sin y = b_2, \end{cases}$$

dove $b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ è un dato assegnato.

Certamente, quando $b = 0$ il sistema ha almeno la soluzione nulla $x = y = 0$. Ci proponiamo di provare il seguente fatto: esistono due numeri $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$ tali che per ogni $b \in B_\varepsilon(0)$ esiste un'unica soluzione $(x, y) \in B_\delta(0)$ del sistema.

Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la funzione $f(x, y) = (x + y \sin x, x^2 y + \sin y)$. Risulta $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$. La matrice Jacobiana di f è

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 + y \cos x & \sin x \\ 2xy & x^2 + \cos y \end{pmatrix}.$$

Nel punto $(x, y) = (0, 0) = 0$ si ha $\det J_f(0) = 1$ e per continuità si deduce l'esistenza di $\delta > 0$ tale che $\det J_f(x, y) > 0$ per ogni $(x, y) \in B_\delta(0)$. Dunque, f è un diffeomorfismo locale di classe C^∞ su $B_\delta(0)$. Per il Teorema di invertibilità locale, pur di prendere $\delta > 0$ ancora più piccolo, f è anche aperta ed iniettiva su $B_\delta(0)$. Dunque l'insieme $f(B_\delta(0)) \subset \mathbb{R}^2$ è aperto e siccome $0 = f(0) \in f(B_\delta(0))$ allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B_\varepsilon(0) \subset f(B_\delta(0))$.

Se $b \in B_\varepsilon(0)$ allora esiste $(x, y) \in B_\delta(0)$ tale che $f(x, y) = b$ e per l'iniettività di f il punto (x, y) è unico in $B_\delta(0)$.

Prova del Teorema 1.3. A) \Rightarrow B). Fissiamo $x_0 \in A$ e sia $\delta > 0$ tale che $f \in C^k(B_\delta(x_0); \mathbb{R}^n)$ sia un diffeomorfismo di classe C^k . Indichiamo con $f^{-1} : f(B_\delta(x_0)) \rightarrow B_\delta(x_0)$ la funzione inversa. Allora per ogni $x \in B_\delta(x_0)$ si ha $f^{-1}(f(x)) = x = I_n(x)$, dove I_n è la matrice identità $n \times n$. Dal teorema sul differenziale della funzione composta si ha

$$J_{f^{-1}}(f(x))J_f(x) = I_n, \quad x \in B_\delta(x_0).$$

Dal teorema sui determinanti si ottiene allora

$$1 = \det(I_n) = \det(J_{f^{-1}}(f(x))J_f(x)) = \det(J_{f^{-1}}(f(x))) \det(J_f(x)).$$

Questo implica che $\det(J_f(x)) \neq 0$ per ogni $x \in B_\delta(x_0)$ e in particolare per $x = x_0$.

B) \Rightarrow A). Supponiamo che sia $\det(J_f(x)) \neq 0$ in ogni punto $x \in A$. Siano $x_0 \in A$ ed $\varepsilon > 0$ piccolo a piacere tale che $B_\varepsilon(x_0) \subset A$. Proveremo che

$$(1.22) \quad \text{esiste } \delta > 0 \text{ tale che } B_\delta(f(x_0)) \subset f(B_\varepsilon(x_0)).$$

Da questo segue che f trasforma punti interni in punti interni e quindi aperti in aperti.

L'affermazione precedente può essere riscritta nel seguente modo:

$$(1.23) \quad \exists \delta > 0 \forall y \in B_\delta(f(x_0)) \exists x \in B_\varepsilon(x_0) \text{ tale che } f(x) = y.$$

Fissiamo dunque $y \in B_\delta(f(x_0))$ con $\delta > 0$ da determinare e cerchiamo un punto $x \in B_\varepsilon(x_0)$ tale che $f(x) = y$. Sia $T = df(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ il differenziale di f in x_0 e osserviamo che $\det(T) = \det(J_f(x_0)) \neq 0$. Dunque esiste l'operatore lineare inverso $T^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$. Definiamo la funzione K della variabile x

$$(1.24) \quad K(x) = x - T^{-1}(f(x) - y).$$

Vogliamo provare che $K : \bar{B}_\varepsilon(x_0) \rightarrow \bar{B}_\varepsilon(x_0)$ è una contrazione rispetto alla distanza standard.

Siccome $\bar{B}_\varepsilon(x_0)$ è completo con la distanza ereditata da \mathbb{R}^n , dal Teorema di punto fisso di Banach segue che esiste un (unico) punto $x \in \bar{B}_\varepsilon(x_0)$ tale che $x = K(x)$. Ma allora

$$x = K(x) = x - T^{-1}(f(x) - y) \quad \Leftrightarrow \quad 0 = T^{-1}(f(x) - y) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) - y = 0,$$

e quindi $f(x) = y$. Questo prova l'affermazione (1.23).

Dobbiamo mostrare che: i) K è ben definita, e cioè trasforma $\bar{B}_\varepsilon(x_0)$ in se stesso; ii) K è una contrazione. Per provare che K è ben definita conviene introdurre la funzione ausiliaria $g(x) = x - T^{-1}(f(x))$.

Osserviamo che $dg(x_0) = I_n - T^{-1}df(x_0) = 0$, ovvero

$$(1.25) \quad \frac{\partial g_i(x_0)}{\partial x_j} = 0, \quad i, j = 1, \dots, n$$

Siccome g è di classe C^1 (in quanto lo è f), pur di prendere un $\varepsilon > 0$ più piccolo, si può per continuità supporre che

$$(1.26) \quad \|dg(x)\| \leq \frac{1}{2} \quad \text{per ogni } x \in B_\varepsilon(x_0).$$

Questa affermazione può essere provata partendo dalla disuguaglianza

$$\|dg(x)\| \leq \left(\sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} \right)^2 \right)^{1/2},$$

usando (1.25) insieme alla continuità delle derivate parziali di g .

Sia ora $x \in \bar{B}_\varepsilon(x_0)$. Allora abbiamo

$$\begin{aligned} |K(x) - x_0| &= |x - T^{-1}(f(x) - y) - x_0| = |x - T^{-1}(f(x)) + T^{-1}(y) - x_0| \\ &= |g(x) - g(x_0) + T^{-1}(y - f(x_0))| \leq |g(x) - g(x_0)| + |T^{-1}(f(x_0) - y)|. \end{aligned}$$

Per il Corollario del Teorema del valor medio esiste $z \in [x_0, x]$ tale che

$$|g(x) - g(x_0)| \leq \|dg(z)\| |x - x_0|,$$

e quindi

$$|K(x) - x_0| \leq \|dg(z)\| |x - x_0| + \|T^{-1}\| |f(x_0) - y| \leq \frac{1}{2}\varepsilon + \delta \|T^{-1}\|.$$

In definitiva, sarà sufficiente scegliere $\delta < \frac{\varepsilon}{2\|T^{-1}\|}$ affinché K sia ben definita.

Proviamo ora che K è una contrazione. Per ogni $x, \bar{x} \in \bar{B}_\varepsilon(x_0)$ si ha come sopra

$$\begin{aligned} |K(x) - K(\bar{x})| &= |x - T^{-1}(f(x) - y) - (\bar{x} - T^{-1}(f(\bar{x}) - y))| \\ &= |x - T^{-1}(f(x)) - (\bar{x} - T^{-1}(f(\bar{x})))| = |g(x) - g(\bar{x})| \leq \frac{1}{2}|x - \bar{x}|. \end{aligned}$$

Dunque K è una contrazione con fattore contrattivo $1/2$.

Prossimo obiettivo è di provare che esiste una costante $M > 0$ tale che per ogni $x, \bar{x} \in B_\varepsilon(x_0)$ si ha

$$(1.27) \quad |f(x) - f(\bar{x})| \geq M|x - \bar{x}|.$$

Tale maggiorazione implica in particolare che f è iniettiva e che f^{-1} è continua. Precisamente f^{-1} verifica

$$(1.28) \quad |f^{-1}(y) - f^{-1}(\bar{y})| \leq \frac{1}{M}|y - \bar{y}|.$$

La verifica di (1.27) si riconduce nuovamente alle proprietà di g :

$$\begin{aligned} |x - \bar{x}| &= |g(x) + T^{-1}(f(x)) - (g(\bar{x}) + T^{-1}(f(\bar{x})))| \\ &\leq |g(x) - g(\bar{x})| + \|T^{-1}\| |f(x) - f(\bar{x})| \\ &\leq \frac{1}{2} |x - \bar{x}| + \|T^{-1}\| |f(x) - f(\bar{x})|, \end{aligned}$$

e quindi $|f(x) - f(\bar{x})| \geq M|x - \bar{x}|$ con $M = \frac{1}{2\|T^{-1}\|}$.

Rimane da provare che la funzione inversa $f^{-1} : f_\varepsilon(B(x_0)) \rightarrow B_\varepsilon(x_0)$ è di classe C^k . Proviamo che f^{-1} è differenziabile con derivate parziali continue (ovvero di classe C^1). Per ipotesi si ha

$$f(x) = f(x_0) + df(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|),$$

e invertendo l'identità precedente con $y = f(x)$ e $y_0 = f(x_0)$ si ottiene

$$\begin{aligned} f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) &= df(x_0)^{-1}(y - y_0 - o(|x - x_0|)) \\ &= df(x_0)^{-1}(y - y_0) - df(x_0)^{-1}(o(|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)|)). \end{aligned}$$

Dalla (1.28) si deduce che $df(x_0)^{-1}(o(|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)|)) = o(|y - y_0|)$, e quindi f^{-1} è differenziabile nel punto y_0 con differenziale

$$df^{-1}(y_0) = df(x_0)^{-1}.$$

Poichè il differenziale può essere rappresentato come la matrice delle derivate parziali, da quest'ultima espressione si vede che la continuità delle derivate parziali di f^{-1} segue dalla continuità di quelle di f . Analogo discorso vale per la regolarità superiore. I dettagli sono omissi. \square

ESERCIZIO 42. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Provare che:

- i) f è derivabile in tutti i punti e $f'(0) = 1$;
- ii) f non è iniettiva in alcun intorno di $x = 0$;
- iii) Mettere in accordo i fatti precedenti con il Teorema di invertibilità locale.

Soluzione. Usando la definizione si calcola $f'(0) = 1$ e inoltre per $x \neq 0$

$$f'(x) = 1 + 2x \sin(1/x) - \cos(1/x).$$

Nei punti

$$x_k = \frac{1}{2k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z}, k \neq 0,$$

si ha $f'(x_k) = 0$. Per $x \neq 0$ la derivata seconda di f è

$$f''(x) = 2 \sin(1/x) - \frac{2}{x} \cos(1/x) - \frac{1}{x^2} \sin(1/x),$$

e quindi per $k > 0$

$$f''(x_k) = -\frac{2}{x_k} < 0.$$

I punti x_k sono punti di massimo locale stretto e quindi f non è iniettiva in alcun intorno di $x = 0$.

Questi fatti non sono in contrasto con il teorema di invertibilità locale. La funzione f , infatti, non è di classe C^1 in $x = 0$ in quanto il limite di $f'(x)$ per $x \rightarrow 0$ non esiste.

ESERCIZIO 43. Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la funzione

$$f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy).$$

- i) Determinare il più grande aperto $A \subset \mathbb{R}^2$ tale che f sia un diffeomorfismo locale di classe C^∞ su A .
- ii) Stabilire se f è un diffeomorfismo su A ;
- iii) Dare esempi di insiemi aperti $B \subset A$ massimali su cui f è un diffeomorfismo.

Soluzione. i) La matrice Jacobiana di f è

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix},$$

e dunque $\det J_f(x, y) = 4(x^2 + y^2)$. Sull'insieme $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ il determinante Jacobiano non si annulla e dunque per il Teorema di invertibilità locale f è un diffeomorfismo locale (di classe C^∞) su A .

ii) f non è iniettiva su A in quanto $f(-x, -y) = f(x, y)$. Dunque f non è un diffeomorfismo su A .

iii) Un insieme aperto $B \subset A$ su cui f è un diffeomorfismo non può contenere punti simmetrici rispetto all'origine. Fissato un punto $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$ cerchiamo delle soluzioni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ del sistema di equazioni $f(x, y) = (\xi, \eta)$ e cerchiamo delle opportune restrizioni su (x, y) tali che la soluzione sia unica. Il sistema di equazioni è

$$x^2 - y^2 = \xi, \quad 2xy = \eta.$$

Dividiamo la seconda equazione per y . Per farlo occorre supporre $y \neq 0$. Si ottiene $x = \eta/2y$ che sostituita nella prima equazione fornisce

$$\frac{\eta^2}{4y^2} - y^2 = \xi.$$

Riordinando e risolvendo in y^2 si trovano le soluzioni

$$y^2 = \frac{-\xi \pm \sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{2}.$$

La soluzione col segno $-$ va scartata. L'equazione in y ha ora due soluzioni opposte. Scegliamo la soluzione positiva, ovvero richiediamo $y > 0$. Si trova

$$y = \sqrt{\frac{-\xi + \sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{2}}.$$

Dopo alcuni conti si ottiene allora anche

$$x = \operatorname{sgn}(\eta) \sqrt{\frac{\xi + \sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{2}}.$$

In definitiva, con la restrizione $y > 0$ siamo stati in grado di trovare una soluzione (x, y) unica. Quindi, sull'insieme aperto $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$, il semipiano superiore, la funzione f è iniettiva e dunque un diffeomorfismo. Un aperto che contiene strettamente B contiene necessariamente punti simmetrici rispetto all'origine. Quindi B è massimale.