

Analisi 2 – Fisica e Astronomia

Nome:

Appello scritto del 13 Febbraio 2012

Esercizio 1 (8 pti) Sia $\alpha > 0$ un parametro e consideriamo la curva piana $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = \left(\frac{t^\alpha}{t+1} \cos\left(\frac{1}{t}\right), \frac{t^\alpha}{t+1} \sin\left(\frac{1}{t}\right) \right), \quad \text{se } t \in (0, 1], \quad \text{e } \gamma(0) = (0, 0).$$

- 1) Riparametrizzare γ in coordinate polari e disegnare approx. il sostegno di γ per $\alpha = 1$.
- 2) Calcolare tutti gli $\alpha > 0$ tali che la curva γ sia rettificabile.

Esercizio 2 (8 pti) Si consideri la seguente funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 - y^2 & \text{se } x^2 - y^2 < 1 \\ x^2 & \text{se } x^2 - y^2 \geq 1. \end{cases}$$

- i) Al variare di $c \in \mathbb{R}$ descrivere l'insieme $E_c := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = c\}$.
- ii) Determinare l'insieme dei punti di continuità di f in \mathbb{R}^2 .
- iii) Determinare l'insieme di derivabilità parziale di f e calcolare le derivate parziali.
- iv) Stabilire se f è differenziabile nel punto $(1, 0) \in \mathbb{R}^2$.

Esercizio 3 (8 pti) Si consideri il seguente Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - 2x(y')^2 = 0, \\ y(1) = 0, \\ y'(1) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Calcolare la soluzione del problema (porre $y' = z$) specificando l'intervallo massimale di esistenza della soluzione.

Esercizio 4 (8 pti) Determinare il massimo della funzione $f(x, y) = 2xy$ sull'insieme

$$B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq \frac{1}{\alpha^2 + y^2} \right\},$$

in funzione del parametro $\alpha > 0$.

Tempo a disposizione: 2 ore e 30 minuti.