

Analisi 2 – Fisica e Astronomia

Nome: _____ Appello scritto del 12 Settembre 2011 – Compito A

Esercizio 1 (8 pti) Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$I_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{x \arctan(x^\alpha)}{\sinh(x^2)} dx.$$

Esercizio 2 (8 pti) Sia $p > 0$ un numero reale fissato, sia $K_p \subset \mathbb{R}^2$ l'insieme

$$K_p = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x|^{2p} + |y|^{2p} \leq 1\},$$

e sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione $f(x, y) = x^3 y^3$.

- 1) [3 pti] Provare che f assume su K_p un valore minimo m_p ed un valore massimo M_p .
- 2) [5 pti] Calcolare i valori m_p ed M_p .

Esercizio 3 (8 pti) Si considerino il quadrato $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1 \text{ e } |y| \leq 1\}$ e la funzione $f : Q \rightarrow \mathbb{R}^2$ a valori in \mathbb{R}^2 così definita

$$f(x, y) = \left(\frac{1}{6}(1 - y - y^2), \frac{1}{6}(x^2 - x - 1) \right).$$

- 1) [2 pti] Provare che $f(Q) \subset Q$.
- 2) [6 pti] Usando il teorema delle contrazioni, provare che il sistema di equazioni

$$\begin{cases} 6x = 1 - y - y^2 \\ 6y = x^2 - x - 1 \end{cases}$$

ha nel quadrato Q una soluzione unica $(x, y) \in Q$.

Esercizio 4 (8 pti) Si consideri la seguente equazione differenziale non lineare

$$(y')^2 + xy' - y = 0.$$

- 1) [5 pti] Calcolare tutti i polinomi di grado minore o uguale a 2 che risolvono l'equazione differenziale.
- 2) [2 pti] Esistono polinomi di grado maggiore di 2 che risolvono l'equazione?
- 3) [1 pti] Sia $y \in C^1(\mathbb{R})$ una soluzione dell'equazione differenziale. Provare che $x^2 + 4y(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Tempo a disposizione: 3 ore.