

# Analisi 2 – Fisica e Astronomia

Nome: \_\_\_\_\_ Appello scritto del 12 Settembre 2011 – Compito A

---

**Esercizio 1 (8 pts)** Al variare del parametro  $\alpha \in \mathbb{R}$  studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$I_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{x \arctan(x^\alpha)}{\sinh(x^2)} dx.$$

**Esercizio 2 (8 pts)** Sia  $p > 0$  un numero reale fissato, sia  $K_p \subset \mathbb{R}^2$  l'insieme

$$K_p = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x|^{2p} + |y|^{2p} \leq 1\},$$

e sia  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione  $f(x, y) = x^3 y^3$ .

- 1) [3 pts] Provare che  $f$  assume su  $K_p$  un valore minimo  $m_p$  ed un valore massimo  $M_p$ .
- 2) [5 pts] Calcolare i valori  $m_p$  ed  $M_p$ .

**Esercizio 3 (8 pts)** Si considerino il quadrato  $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1 \text{ e } |y| \leq 1\}$  e la funzione  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}^2$  a valori in  $\mathbb{R}^2$  così definita

$$f(x, y) = \left( \frac{1}{6}(1 - y - y^2), \frac{1}{6}(x^2 - x - 1) \right).$$

- 1) [2 pts] Provare che  $f(Q) \subset Q$ .
- 2) [6 pts] Usando il teorema delle contrazioni, provare che il sistema di equazioni

$$\begin{cases} 6x = 1 - y - y^2 \\ 6y = x^2 - x - 1 \end{cases}$$

ha nel quadrato  $Q$  una soluzione unica  $(x, y) \in Q$ .

**Esercizio 4 (8 pts)** Si consideri la seguente equazione differenziale non lineare

$$(y')^2 + xy' - y = 0.$$

- 1) [5 pts] Calcolare tutti i polinomi di grado minore o uguale a 2 che risolvono l'equazione differenziale.
- 2) [2 pts] Esistono polinomi di grado maggiore di 2 che risolvono l'equazione?
- 3) [1 pts] Sia  $y \in C^1(\mathbb{R})$  una soluzione dell'equazione differenziale. Provare che  $x^2 + 4y(x) \geq 0$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ .

---

Tempo a disposizione: 3 ore.