Analisi 2 – Fisica e Astronomia

Appello scritto del 18 Luglio 2011. Soluzione

Esercizio 1 (7 pti) Sia $\alpha > 0$ un parametro e consideriamo la curva piana $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = \left(t^2 \cos\left(\frac{1}{t^\alpha}\right), t^2 \sin\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)\right), \quad \text{se } t \in (0,1], \quad \text{e} \quad \gamma(0) = (0,0).$$

1) [2 pti] Riparametrizzare γ in coordinate polari e disegnare approx. il sostegno di γ.

2) [5 pti] Calcolare tutti gli $\alpha > 0$ tali che la curva γ è rettificabile.

Soluzione. 1) Con il cambiamento di parametro $\vartheta = \frac{1}{t^\alpha}$, ovvero $t = \frac{1}{\vartheta^{1/\alpha}}$ si ottiene la curva

$$\varphi(\vartheta) = \left(\vartheta^{-2/\alpha} \cos(\vartheta), \vartheta^{-2/\alpha} \sin(\vartheta)\right), \quad \vartheta \in [1, \infty),$$

e $\varphi(\infty) = (0,0)$. La curva φ è una riparametrizzazione di γ e la sua equazione polare è $\varrho = \vartheta^{-2/\alpha}$. Il sostegno di γ è una spirale che si avvicina in senso antiorario all'origine del piano $\mathbb{R}^2$.

2) Dalla formula per la lunghezza in coordinate polari si ha (la lunghezza non dipende dalla parametrizzazione):

$$L(\gamma) = \int_1^\infty \sqrt{\varrho^2 + \dot{\varrho}^2}\, d\vartheta = \int_1^\infty \sqrt{\vartheta^{-4/\alpha} + \frac{4}{\alpha^2}\vartheta^{-4/\alpha-2}}\, d\vartheta = \int_1^\infty \frac{1}{\vartheta^{2/\alpha}} \sqrt{1 + \frac{4}{\alpha^2\vartheta^2}}\, d\vartheta.$$

La curva γ è rettificabile se e solo se l'ultimo integrale improprio è convergente. Per il criterio del confronto asintotico, l'integrale improprio converge esattamente quando converge l'integrale

$$\int_1^\infty \frac{1}{\vartheta^{2/\alpha}}\, d\vartheta < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{\alpha} > 1.$$

Quindi la curva è rettificabile se e solo se $\alpha < 2$.

Esercizio 2 (8 pti) In dipendenza da $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) := \begin{cases} (2x^2 + y^2)^\alpha \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1) [6 pti] Studiare la continuità e la differenziabilità di f al variare del parametro α.

2) [2 pti] Esiste α tale che f è differenziabile su $\mathbb{R}^2$ ma non di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$?

Soluzione. 1) Chiaramente si ha $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$. È sufficiente studiare la continuità e la differenziabilità della funzione nell'origine.
Se $\alpha > 0$, dalla disuguaglianza

$$|f(x,y)| \le 2^\alpha (x^2+y^2)^\alpha$$

segue per confronto la continuità di f in 0. Per $\alpha = 0$, la funzione f si riduce a

$$f(x,y) = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right),$$

che non ha limite per $\sqrt{x^2+y^2} \to 0$ e quindi f non è continua in 0. In modo analogo si prova che per $\alpha < 0$ la funzione f non è continua in 0.
Studiamo la differenziabilità nel caso $\alpha > 0$. Dalla disuguaglianza

$$\frac{|f(x,y) - f(0,0)|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{(2x^2+y^2)^\alpha \left|\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le 2^\alpha (x^2+y^2)^{\alpha-1/2},$$

si deduce che per $\alpha > 1/2$ esistono le derivate parziali di f in $(0,0)$ e valgono:

$$f_x(0,0) = 0 \quad \text{e} \quad f_y(0,0) = 0.$$

Per $\alpha \le 1/2$ le derivate parziali non esistono e dunque non cè differenziabilità. Usando la medesima disuguaglianza si prova che per $\alpha > 1/2$ si ha

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \langle \nabla f(0,0), (x,y)\rangle}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Dunque. f è differenziabile in 0 se e solo se $\alpha > 1/2$.
2) Le derivate parziali di f in un punto $(x,y) \neq (0,0)$ sono

$$\begin{aligned}
f_x(x,y) &:= 4\alpha(2x^2+y^2)^{\alpha-1} x \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{x(2x^2+y^2)^\alpha}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), \\
f_y(x,y) &:= 2\alpha(2x^2+y^2)^{\alpha-1} y \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{y(2x^2+y^2)^\alpha}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).
\end{aligned}$$

Le derivate parziali sono continue in 0 se e solo se $\alpha > 1$. Dunque, per $1/2 < \alpha \le 1$ la funzione f è differenziabile ma non di classe C^1.
Ad esempio, si consideri il caso $\alpha = 1$. In questo caso si ha

$$f_x(x,y) = 4x \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{x(2x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

Il primo addendo tende a 0 se $(x,y) \to (0,0)$, mentre il secondo non ammette limite. Per vederlo si possono ad esempio usare coordinate polari $x = \varrho\cos\theta$, $y = \varrho\sin\theta$, con $\varrho \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$:

$$f(\varrho\cos\theta, \varrho\sin\theta) = 4\varrho\cos\theta\sin\left(\frac{1}{\varrho}\right) - \cos\theta(2\cos^2\theta + \sin^2\theta)\cos\left(\frac{1}{\varrho}\right).$$

Il secondo addendo non ammette limite in quanto prodotto di una funzione che dipende da θ con una funzione di ϱ che non ammette limite per $\varrho \to 0^+$.

Esercizio 3 (9 pti) Per $n \geq 1$ siano $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$ e $x_0 \in B$ tale che $|x_0| \leq \frac{1}{12}$. Sia poi $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la funzione

$$T(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{9}|x|^2 x + x_0.$$

1) [2 pti] Provare che T trasforma B in se, ovvero che $T(B) \subset B$.

2) [5 pti] Per $n = 1$: provare che T è una contrazione da B in se.

3) [2 pti] Per $n \geq 1$: provare che l'equazione $T(x) = x$ ha una soluzione unica $x \in B$.

Soluzione. 1) Basta osservare che, per la subadittività della norma si ha per ogni $x \in B$:

$$|T(x)| \leq \frac{1}{4}|x| + \frac{1}{9}|x|^3 + |x_0| \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} \leq 1.$$

2) Proviamo che T è una contrazione rispetto alla distanza Euclidea. Siccome B è completo, dal Teorema di punto fisso di Banach segue che T ha un unico punto fisso $x \in B$, che risolve l'equazione $T(x) = x$.
Nel caso $n = 1$, la funzione T si può riscrivere in questo modo:

$$T(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{9}x^3 + x_0, \quad \text{che ha derivata} \quad T'(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3}x^2.$$

Osserviamo che se $|x| \leq 1$ allora

$$|T'(x)| \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{3}|x|^2 \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}.$$

Per ogni coppia di punti $x_1, x_2 \in B = [-1, 1]$, per il Teorema di Lagrange esiste un punto $x_3 \in [x_1, x_2] \subset [-1, 1]$ tale che $T(x_1) - T(x_2) = T'(x_3)(x_1 - x_2)$ e quindi

$$|T(x_1) - T(x_2)| = |T'(x_3)||x_1 - x_2| \leq \frac{7}{12}|x_1 - x_2|.$$

Dunque T è una contrazione da B in se.

Alternativamente, si ha

$$\begin{aligned}|T(x_1)-T(x_2)| &= \Big|\frac{1}{4}x_1+\frac{1}{9}x_1^3-\frac{1}{4}x_2-\frac{1}{9}x_2^3\Big| \\ &\le \frac{1}{4}|x_1-x_2|+\frac{1}{9}|x_1^3-x_2^3| = \frac{1}{4}|x_1-x_2|+\frac{1}{9}|(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)| \\ &\le \frac{1}{4}|x_1-x_2|+\frac{1}{9}|x_1-x_2|(x_1^2+|x_1||x_2|+x_2^2) \le \Big(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\Big)|x_1-x_2|.\end{aligned}$$

3) Proviamo che T è una contrazione nel caso generale $n \ge 1$. Siano $x_1, x_2 \in B$. Allora

$$|T(x_1)-T(x_2)| = \Big|\frac{1}{4}x_1+\frac{1}{9}|x_1|^2x_1-\frac{1}{4}x_2-\frac{1}{9}|x_2|^2x_2\Big| \le \frac{1}{4}|x_1-x_2|+\frac{1}{9}\Big||x_1|^2x_1-|x_2|^2x_2\Big|.$$

Maggioriamo l'ultima norma nel seguente modo:

$$\begin{aligned}\Big||x_1|^2x_1-|x_2|^2x_2\Big| &= \Big||x_1|^2x_1-|x_1|^2x_2+|x_1|^2x_2-|x_2|^2x_2\Big| \\ &\le |x_1|^2|x_1-x_2|+|x_2|\big||x_1|^2-|x_2|^2\big| \\ &\le |x_1-x_2|+\big||x_1|^2-|x_2|^2\big| \\ &\le |x_1-x_2|+\big||x_1|-|x_2|\big|\big||x_1|+|x_2|\big| \\ &\le 3|x_1-x_2|.\end{aligned}$$

In conclusione, si ottiene

$$|T(x_1)-T(x_2)| \le \frac{1}{4}|x_1-x_2|+\frac{1}{3}|x_1-x_2| = \frac{7}{12}|x_2-x_2|.$$

Questo prova che T è una contrazione da B in se, ed ora si conclude come nel punto 2).

Esercizio 4 (8 pti) Siano $f(x,y)=\sqrt{y-2x^2}$ e

$$K = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge 0,\ 2y \le x^2+1,\ y \ge 2x^2\big\}.$$

1) [1pto] Determinare il dominio di f e disegnare K nel piano.

2) [2pti] Stabilire se K è aperto/chiuso/compatto/connesso. Calcolare la frontiera ∂K.

3) [4pti] Calcolare i punti di max e min locale/assoluto di f ristretta a ∂K.

4) [1pto] Determinare l'immagine $f(K)$.

Soluzione. 1) Dato che l'argomento della radice deve essere non negativo, la funzione data ha come dominio $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \ge 2x^2\}$. Si noti che $f \ge 0$ per ogni $(x,y) \in D_f$ e dunque il minimo assoluto di f è 0.

L'insieme K è il sottoinsieme di D_f delimitato a sinistra dall'asse y, dal basso dalla parabola di equazione $y = 2x^2$, ed infine dall'alto dalla parabola di equazione $y = \frac{x^2+1}{2}$. Queste tre curve sono regolari di classe C^∞ e si intersecano nei punti $(0,0)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{3}\right)$ e $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Si ha dunque $\partial K = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$, dove

i) $\gamma_1 := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, y \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]\right\}$,

ii) $\gamma_2 := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \left[0, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right], y = 2x^2\right\}$,

iii) $\gamma_3 := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \left[0, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right], y = \dfrac{x^2+1}{2}\right\}$,

2) K è chiuso (ma non aperto), è limitato e quindi anche compatto, ed è connesso in quanto chiaramente connesso per archi.

3) Lo studio di f ristretta alla frontiera ∂K è elementare. Si considera la restrizione di f alle curve γ_1, γ_2 e γ_3:

i) La funzione $f(0,y) = \sqrt{y}$ è monotona crescente nell'intervallo $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Pertanto sul segmento γ_1 la funzione f assume valore minimo 0 nel punto $(0,0)$ e valore massimo $\frac{1}{\sqrt{2}}$ per $y = \frac{1}{2}$.

ii) La funzione $x \mapsto f(x, 2x^2)$ è identicamente nulla. Sulla parabola $y = 2x^2$ la funzione f è 0.

iii) La funzione $x \mapsto f\left(x, \frac{x^2+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{1-3x^2}}{\sqrt{2}}$ è monotona decrescente nell'intervallo $\left[0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$. Pertanto i valori minimo e massimo di f su γ_3 sono $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{3}\right) = 0$ e $f(0, \frac{1}{2}) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

In conclusione, il massimo assoluto di f su ∂K è $\frac{1}{\sqrt{2}}$ che viene assunto nel punto $(0, \frac{1}{2})$, mentre il minimo assoluto di f su ∂K è 0, ed è assunto sulla parabola γ_2.

4) Infine, poichè nell'interno di K il gradiente di f non si annulla mai:

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{-2x}{\sqrt{y-2x^2}}, \frac{1}{2\sqrt{y-2x^2}}\right) \neq (0,0),$$

la funzione f non ha punti di estremo locale nell'interno di K. Essendo K connesso e compatto, dal Teorema di Weierstrass e dal Teorema dei valori intermedi segue che $f(K) = f(\partial K) = \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.