

# Analisi 2 – Fisica e Astronomia

Nome:

Appello scritto del 28 Giugno 2011 – Compito B

---

## Esercizio 1 (8 pts)

- 1) [4 pts] Calcolare l'integrale improprio  $\int_0^1 \log^2 x \, dx$ ;
- 2) [4 pts] Studiare la convergenza dell'integrale improprio  $\int_0^1 \log\left(\frac{1+x^3}{x^3}\right) \log x \, dx$ .

**Esercizio 2 (8 pts)** Siano  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  e sia  $y \in C^\infty(\mathbb{R})$  la soluzione del problema di Cauchy

$$y'' + 6y' + 10y = te^{-3t}, \quad y(0) = \alpha, \quad y'(0) = \beta.$$

- 1) [6 pts] Calcolare la soluzione  $y$ .
- 2) [2 pts] Determinare tutti gli  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  per i quali esiste finito il limite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{y(t)}{t}.$$

**Esercizio 3 (8 pts)** Sia  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^6}{x^6 + y^8} & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- 1) [4 pts] Provare che  $f$  è continua su  $\mathbb{R}^2$ .
- 2) [4 pts] Stabilire se  $f$  è differenziabile in  $(0, 0)$ .

## Esercizio 4 (8 pts)

- 1) [6 pts] Sia  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione  $f(x, y) = 2x^2 + xy + y^2$  e sia

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y^2 \leq 2\}.$$

Determinare l'immagine  $f(K)$ .

- 2) [2 pts] Siano  $a, b, c \in \mathbb{R}$  e  $g(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ . Provare che se  $a > 0$  e  $ac > b^2$  allora  $g$  ammette minimo assoluto in  $\mathbb{R}^2$ .

---

Tempo a disposizione: 3 ore.