Analisi 2 – Fisica e Astronomia

Nome: Appello scritto del 31 Agosto 2011 – Compito A

Esercizio 1 (8 pti) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione così definita:

$$f(x,y) = \left(x^3 + y^3\right)^{1/3}.$$

1) [2 pti] Studiare la continuità di f in $\mathbb{R}^2$
2) [3 pti] Calcolare, se esistono, le derivate parziali e direzionali di f nel punto $(0,0) \in \mathbb{R}^2$.
3) [3 pti] Stabilire se f è differenziabile in $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 2 (8 pti) Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{x(1+y^2)}{y(1-x^2)} \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

1) [6 pti] Calcolare la soluzione del problema specificandone il dominio.
2) [2 pti] Studiare brevemente la soluzione e tracciarne un grafico approssimativo.

Esercizio 3 (8 pti) Si consideri la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \frac{n^2 \sin\left(x/n^2\right)}{1 + n^2 x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1) [2 pti] Calcolare il limite puntuale della successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2) [1 pto] Provare che si ha $|f_n(x)| \leq \dfrac{|x|}{1 + x^2 n^2}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
3) [5 pti] Studiare la convergenza uniforme della successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Esercizio 4 (8 pti) Siano $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 + x + y > 0\}$ ed $f : A \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \log(1 + x + y) - e^{x(1+y)} + 1.$$

1) [3 pti] Provare che l'equazione $f = 0$ definisce implicitamente intorno a $0 \in \mathbb{R}^2$ una funzione φ definita in un intervallo $(-\delta, \delta)$ per qualche $\delta > 0$.
2) [2 pti] Esprimere φ' in funzione (di φ e) delle derivate parziali di f in un generico punto di $(-\delta, \delta)$ e calcolare poi $\varphi'(0)$.
3) [3 pti] Calcolare $f_{xx}(0,0)$ e quindi $\varphi''(0)$.

Tempo a disposizione: 3 ore.