Analisi 2 – Fisica e Astronomia

Appello scritto del 31 Agosto 2011. Soluzione

Esercizio 1 (8 pti) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione così definita:

$$f(x,y) = \left(x^3 + y^3\right)^{1/3}.$$

1) [2 pti] Studiare la continuità di f in $\mathbb{R}^2$

2) [3 pti] Calcolare, se esistono, le derivate parziali e direzionali di f nel punto $(0,0) \in \mathbb{R}^2$.

3) [3 pti] Stabilire se f è differenziabile in $\mathbb{R}^2$.

Soluzione. Se n è un numero naturale dispari la funzione radice n-esima $t \mapsto \sqrt[n]{t} \in \mathbb{R}$ è una funzione continua da $\mathbb{R}$ in se stesso. Ricordando che la somma di funzioni continue è continua, segue immediatamente che la funzione $f(x,y) = (x^n + y^n)^{1/n}$ è continua su $\mathbb{R}^2$, essendo composizione di funzioni continue.
Sia ora $n = 3$ (il caso $n = 5$ è analogo). Calcoliamo le derivate parziali in $(0,0)$. Usando la definizione, si ottiene

$$f_x(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{(t^3)^{1/3}}{t} = 1$$
$$f_y(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{(t^3)^{1/3}}{t} = 1.$$

Calcoliamo ora tutte le derivate direzionali nell'origine. Dato un vettore $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ si ha, per definizione,

$$f_v(0,0) = \frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tv_1, tv_2)}{t} = f(v_1, v_2) = \left(v_1^3 + v_2^3\right)^{1/3}. \tag{1}$$

Si osservi che f è 1-omogenea, ovvero $f(tv) = tf(v)$ per ogni $v \in \mathbb{R}^2$ e per ogni $t \in \mathbb{R}$.
Esaminiamo la differenziabilità nell'origine. Ricordiamo il seguente teorema: una funzione f differenziabile in un punto $p \in \mathbb{R}^n$ ha derivate direzionali in ogni direzione $v \in \mathbb{R}^n$ e inoltre $f_v(p) = \langle \nabla f(p), v\rangle$.
Nel caso in esame, se f fosse differenziabile in $(0,0)$ si dovrebbe avere per ogni $v \in \mathbb{R}^2$

$$\left(v_1^3 + v_2^3\right)^{1/3} = f_v(0,0) = \langle \nabla f(0,0), v\rangle = v_1 + v_2.$$

Ma questo non è vero. Dunque, f non è differenziabile in $(0,0)$.

Esercizio 2 (8 pti) Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{x(1+y^2)}{y(1-x^2)} \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

1) [6 pti] Calcolare la soluzione del problema specificandone il dominio.

2) [2 pti] Studiare brevemente la soluzione e tracciarne un grafico approssimativo.

Soluzione. Si tratta di un problema di Cauchy associato ad una equazione a variabili separabili, cioè del tipo $y' = f(x)g(y)$ con

$$f(x) = -\frac{x}{1-x^2} \quad \text{e} \quad g(y) = \frac{1+y^2}{y}.$$

Affinchè l'equazione sia bene posta, deve essere $1 - x^2 \neq 0$ ed $y \neq 0$. Tenuto conto che il dato iniziale è assegnato per $x = 0$ e che la soluzione deve essere definita su un intervallo, restringiamo la variabile all'intervallo $-1 < x < 1$. Tenuto conto del valore iniziale $y(0) = 1 > 0$ della soluzione, sarà sempre $y > 0$.
Separando le variabili nell'equazione differenziale e integrando, si trova

$$\int \frac{y dy}{1+y^2} = -\int \frac{x dx}{1-x^2} + C,$$

dove C è una costante, ovvero

$$\frac{1}{2}\log(1+y^2) = \frac{1}{2}\log|1-x^2| + C.$$

Usando la condizione iniziale $y(0) = 1$ si trova $C = \frac{1}{2}\log 2$. Esponenziando si arriva alla soluzione in forma implicita

$$y^2 = 2|1-x^2| - 1 = 1 - 2x^2.$$

Abbiamo usato il fatto che $1 - x^2 > 0$ per togliere il valore assoluto. Nell'equazione $2x^2 + y^2 = 1$ riconosciamo un'ellisse centrata nell'origine. Per estrarre la radice correttamente si ricordi che $y > 0$. Si trova dunque la soluzione

$$y(x) = \sqrt{1-2x^2}.$$

Il dominio della soluzione è l'intervallo aperto $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. La funzione è definita anche negli estremi dell'intervallo, ma in questi punti non è derivabile e non è dunque da considerare soluzione dell'equazione differenziale (che peraltro è definita solo per $y \neq 0$).
Il grafico della soluzione è la parte superiore di un'ellisse.

Esercizio 3 (8 pti) Si consideri la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \frac{n^2 \sin\big(x/n^2\big)}{1 + n^2 x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1) [2 pti] Calcolare il limite puntuale della successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2) [1 pto] Provare che si ha $|f_n(x)| \le \frac{|x|}{1+x^2n^2}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

3) [5 pti] Studiare la convergenza uniforme della successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Soluzione. 1) Se $x = 0$ si ha $f_n(0) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e dunque il limite è 0. Per $x \neq 0$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{1 + x^2 n^2} = \frac{1}{x^2}, \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \sin\big(x/n^2\big) = 0.$$

L'ultima affermazione segue dalla continuità della funzione seno. Dunque $f_n(x) \to 0$ per $n \to \infty$ anche per ogni $x \neq 0$.
2) Si usa la disuguaglianza elementare $|\sin(t)| \le |t|$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e si ottiene

$$|f_n(x)| \le \frac{n^2|x/n^2|}{1 + n^2x^2} = \frac{|x|}{1 + n^2x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

3) Proviamo che la successione di funzioni $g_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$ converge a zero uniformemente per $x \ge 0$. La derivata di g_n è

$$g_n'(x) = \frac{1 - n^2x^2}{(1 + n^2x^2)^2}, \quad x \ge 0.$$

Quindi, si ha $g_n'(x) > 0$ per $x \in [0, 1/n)$ e $g_n'(x) < 0$ per $x > 1/n$. Deduciamo che nel punto $x = 1/n$ la funzione g_n assume il valore massimo, che vale

$$g(1/n) = \frac{1}{2n}.$$

Per considerazioni elementari di simmetria, si ha

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| \le \sup_{x\in\mathbb{R}} |g_n(x)| = g_n(1/n) = \frac{1}{2n} \to 0$$

per $n \to \infty$. Quindi, la successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a 0 per $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4 (8 pti) Siano $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 + x + y > 0\}$ ed $f : A \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \log(1 + x + y) - \mathrm{e}^{x(1+y)} + 1.$$

1) [3 pti] Provare che l'equazione $f = 0$ definisce implicitamente intorno a $0 \in \mathbb{R}^2$ una funzione φ definita in un intervallo $(-\delta, \delta)$ per qualche $\delta > 0$.

2) [2 pti] Esprimere φ' in funzione delle derivate parziali di f e di φ in un generico punto di $(-\delta, \delta)$ e calcolare poi $\varphi'(0)$.

3) [3 pti] Calcolare $f_{xx}(0, 0)$ e quindi $\varphi''(0)$.

Soluzione. 1) Chiaramente si ha $f \in C^\infty(A)$. Osserviamo che $f(0, 0) = 0$. Le derivate parziali di f sono

$$f_x(x, y) = \frac{1}{1 + x + y} - (1 + y)\mathrm{e}^{x(1+y)}, \quad f_y(x, y) = \frac{1}{1 + x + y} - x\mathrm{e}^{x(1+y)}.$$

Nel punto $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ si ha $f_x(0, 0) = 0$ e $f_y(0, 0) = 1$. Per il Teorema della funzione implicita, l'insieme $\{f = 0\}$ si può esprimere in un intorno di $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ come il grafico di una funzione $\varphi \in C^\infty(-\delta, \delta)$ per qualche $\delta > 0$ e precisamente per qualche $\eta > 0$

$$\{(x, y) \in (-\delta, \delta) \times (-\eta, \eta) : f(x, y) = 0\} = \{(x, \varphi(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in (-\delta, \delta)\}.$$

2) Dal teorema della funzione implicita sappiamo che

$$\varphi'(x) = -\frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))} = -\frac{1 - (1 + \varphi(x))(1 + x + \varphi(x))\mathrm{e}^{x(1+\varphi(x))}}{1 - x(1 + x + \varphi(x))\mathrm{e}^{x(1+\varphi(x))}}.$$

Nel punto $x = 0$ si trova $\varphi'(0) = 0$.
3) La derivata parziale seconda di f richiesta è

$$f_{xx}(x, y) = -\frac{1}{(1 + x + y)^2} - (1 + y)^2\mathrm{e}^{x(1+y)},$$

e quindi $f_{xx}(0, 0) = -2$.
La derivata seconda di φ in un generico punto è

$$\varphi'' = -\frac{[f_{xx}(x, \varphi) + f_{xy}(x, \varphi)\varphi']f_y(x, \varphi) - [f_{xy}(x, \varphi) + f_{yy}(x, \varphi)\varphi']f_x(x, \varphi)}{(f_y(x, \varphi))^2}.$$

Usando $\varphi'(0) = 0$ e $f_x(0, 0) = 0$ si ottiene

$$\varphi''(0) = -\frac{f_{xx}(0, 0)}{f_y(0, 0)} = 2.$$